Polo del Conocimiento

Pol. Con. (Edición núm. 101) Vol. 9, No 12
Diciembre 2024, pp. 3457-3467
ISSN: 2550 - 682X
DOI: https://doi.org/10.23857/pc.v9i12.8898

La raíz cuadrada de una matriz de adyacencia para analizar conexiones en una red

The square root of an adjacency matrix for analyzing connections in a network

A raiz quadrada de uma matriz de adjacência para analisar ligações numa rede

Paul Freire-Diaz [I]
jpfreire@unach.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-0657-9717

Ximena López-Mendoza [II]
xlopez@unach.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-9564-6300

Mónica Mazón-Fierro [III]
mmazon@unach.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-5303-9174

Guido Mazón-Fierro [IV]
guido.mazon@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-8745-2373

Pamela Buñay-Guisñan [V]
pbunay@unach.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-4320-6899

Correspondencia: jpfreire@unach.edu.ec

Ciencias de la Educación
Artículo de Investigación

* **Recibido:** 22 de octubre de 2024 ***Aceptado:** 18 de noviembre de 2024 * **Publicado:** 31 de diciembre de 2024

I. Universidad Nacional de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
II. Universidad Nacional de Chimborazo, Riobamba, Ecuador, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.
III. Universidad Nacional de Chimborazo, Riobamba, Ecuador, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.
IV. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
V. Universidad Nacional de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.

Resumen

La raíz cuadrada de una matriz de adyacencia es una herramienta que permite analizar conexiones en redes complejas. Este método permite descubrir relaciones indirectas y patrones de conectividad que no son evidentes al examinar solo las conexiones directas. Al calcular la raíz cuadrada de la matriz de adyacencia, es posible obtener información sobre el grado de influencia o conexión entre nodos, lo que facilita la identificación de estructuras subyacentes y agrupaciones. El propósito de este trabajo es abordar de forma sencilla los conceptos de matriz de adyacencia y su aplicación dentro del análisis de relaciones entre puntos o usuarios de una red.

Palabras Clave: Raíz Cuadrada; Matriz de Adyacencia; Redes.

Abstract

The square root of an adjacency matrix is a tool that allows the analysis of connections in complex networks. This method allows the discovery of indirect relationships and connectivity patterns that are not evident when examining only direct connections. By calculating the square root of the adjacency matrix, it is possible to obtain information about the degree of influence or connection between nodes, which facilitates the identification of underlying structures and clusters. The purpose of this work is to address in a simple way the concepts of adjacency matrix and its application within the analysis of relationships between points or users of a network.

Keywords: Square Root; Adjacency Matrix; Networks.

Resumo

A raiz quadrada de uma matriz de adjacência é uma ferramenta que permite analisar ligações em redes complexas. Este método permite-nos descobrir relações indiretas e padrões de conectividade que não são aparentes quando examinamos apenas as ligações diretas. Através do cálculo da raiz quadrada da matriz de adjacência, é possível obter informação sobre o grau de influência ou ligação entre os nós, o que facilita a identificação das estruturas e clusters subjacentes. O objetivo deste trabalho é abordar de forma simples os conceitos de matriz de adjacência e a sua aplicação dentro da análise de relações entre pontos ou utilizadores de uma rede.

Palavras-chave: Raiz quadrada; Matriz de Adjacência; Redes.

Introducción

La raíz cuadrada de una matriz tiene diversas aplicaciones en matemáticas y campos relacionados. La raíz cuadrada de matrices se utiliza en el diseño de sistemas de control (Aguado, 2006), y en la resolución de ecuaciones diferenciales para simplificar el proceso al permitir la diagonalización de matrices, facilitando así la resolución de sistemas complejos. Los algoritmos que utilizan raíces cuadradas de matrices son fundamentales en métodos numéricos para resolver problemas de optimización, como el método de Newton-Raphson (Pho, 2022; Sereeter, Vuik, & Witteveen, 2019; Syafii, Ridhallah, & Nur, 2023), aplicado a sistemas no lineales. En procesamiento digital de señales, la raíz cuadrada de matrices se utiliza en técnicas como la descomposición en valores singulares (SVD), que es esencial para la compresión y análisis de datos (Funez, 2021; Pernice, 2024). Es importante mencionar que el cálculo de la raíz cuadrada de una matriz no es un tema trivial, siendo necesario en el caso de matrices de alto orden el uso de programas y algoritmos computacionales.

Una definición de la raíz cuadrada de una matriz es que, si tenemos que A y B son matrices cuadradas del mismo orden, podemos decir que B es la raíz cuadrada de A, escrito como $B = \sqrt{A}$, si $B^2 = A$.

En (Rubiales Camino, 2005), se muestra con ejemplos la aplicación de esta definición, así como el análisis de ciertos casos particulares. Si A es una matriz simétrica o normal, la raíz cuadrada podría ser calculada usando una descomposición espectral o la técnica de descomposición en valores singulares o SVD (por sus siglas en inglés: Singular Value Decomposition), que se describe detalladamente en (Pernice, 2024); algunas consideraciones sobre la raíz cuadrada de una matriz y métodos para su obtención de forma manual se encuentran en (Asmar Charris & Menco Mendoza José T., 1995; Nazari, Fereydooni, & Bayat, 2013) .

Se estudian en (Castillo Garcia & Huerta Rivera, 2015) algoritmos para el cálculo de la raíz cuadrada de una matriz no singular, motivados por encontrar procesos eficientes desde el punto de vista computacional. Con la misma motivación por parte de (Iannazzo, 2003; Mendoza Mexía, Rubén, & Aldama, 2010) se analiza el método simplificado de Newton, uno de los más utilizados. Para analizar la matriz raíz cuadrada en la detección de comunidades, se puede usar el método de Louvain (Carnivali, Vieira, Esquef, & Ziviani, 2020; Paletta & Moreiro-González, 2021) o el algoritmo de Girvan-Newman (Castillo, Palma García, & Gómez Jacinto, 2017) para agrupar a los actores en comunidades basadas en sus conexiones directas e indirectas. Esto permite a los analistas identificar subgrupos dentro de la red que tienen interacciones más fuertes entre ellos, lo que es útil para entender dinámicas sociales complejas y para realizar análisis más profundos sobre cómo se forman y evolucionan las comunidades dentro de las redes sociales.

El propósito de este trabajo es abordar de forma sencilla los conceptos de matriz de adyacencia y su aplicación dentro del análisis de relaciones entre puntos o usuarios de una red. La representación de redes sociales mediante matrices y las operaciones básicas entre matrices en este contexto se encuentran en forma detallada en (Hanneman, 2001).

Metodología

Para demostrar cómo la raíz cuadrada de una matriz de adyacencia puede ayudar a identificar conexiones indirectas en una red (Rodríguez et al., 2022), se debe entender cómo se organiza la red y qué representa la matriz de adyacencia. Para esto, utilizaremos ejemplos sencillos tanto de una red simple y del cálculo numérico de la raíz de una matriz.

Supongamos que se tiene una red simple con tres usuarios (A, B y C). La matriz de adyacencia de 3x3 describe las conexiones directas entre estos usuarios, donde cada elemento en la matriz $A[i, j]$ si el usuario *i* está directamente conectado con el usuario j, y 0 si no lo está.

- El usuario A está conectado directamente con los usuarios B y C.
- El usuario B está conectado directamente con el usuario A.
- El usuario C está conectado directamente con el usuario A.

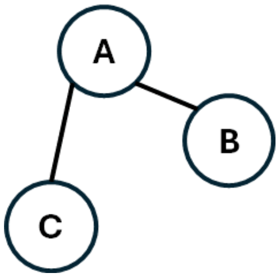

Figura 1: *Representación de una red simple con tres usuarios*

Entonces, la matriz de adyacencia A del ejemplo es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pol. Con. (Edición núm. 101) Vol. 9, No 12, Diciembre 2024, pp. 3457-3467, ISSN: 2550 - 682X

Se propone el análisis de esta red en 2 pasos.

Raíz cuadrada de la matriz de adyacencia

La raíz cuadrada de la matriz de adyacencia A es una operación más abstracta que puede comprenderse en términos de conexiones indirectas o cómo la influencia se propaga entre usuarios a través de los caminos en la red.

A continuación, se obtuvo $A^{1/2}$ de forma analítica utilizando la descomposición espectral (también conocida como diagonalización), método es aplicable cuando la matriz es diagonalizable, siguiendo los procesos detallados en (Asmar Charris & Menco Mendoza José T., 1995; Nazari et al., 2013; Rubiales Camino, 2005). Cabe anotar que se puede calcular también a través de softwares matemáticos tales como Matlab u Octave.

Paso 1: Encontrar los Valores Propios y los Vectores Propios de A

Primero, debemos encontrar los valores propios (λ) y los vectores propios (v) de A resolviendo la ecuación característica:

det(A−λI) = 0

Para la matriz A:

$$det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Calculando el determinante:

$-\lambda(-\lambda^2) +2\lambda=-\lambda^3+2\lambda=0$

$\Rightarrow\lambda(\lambda^2-2) =0$

Por lo tanto, los valores propios son:

$\lambda_1 = 0,$ $\lambda_2 = \sqrt{2},$ $\lambda_3 = -\sqrt{2}$

Vectores Propios Correspondientes:

Para $\lambda_1 = 0$: $Av=0$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = \sqrt{2}$: $(A - \sqrt{2}I)v=0$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_3 = -\sqrt{2}$: $(A + \sqrt{2}I)v=0$

$$\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Formar la Matriz de Diagonalización P y su Inversa P^{-1}

La matriz P está compuesta por los vectores propios como columnas:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de P, P^{-1}, utilizando métodos estándar (como la regla de Sarrus o cofactores). El cálculo detallado de P^{-1} es extenso, pero el resultado es:

$$P^{-1} = \frac{1}{-4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ -2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Construir la Matriz Diagonal de las Raíces Cuadradas de los Valores Propios $D^{1/2}$

Aplicamos la raíz cuadrada a los valores propios de A:

$$D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{0} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{1/4} & 0 \\ 0 & 0 & i2^{1/4} \end{pmatrix}$$

Donde i es la unidad imaginaria, ya que se ha obtenido la raíz cuadrada de un número negativo $(-\sqrt{2})$

Pol. Con. (Edición núm. 101) Vol. 9, No 12, Diciembre 2024, pp. 3457-3467, ISSN: 2550 - 682X

Paso 4: Calcular la Raíz Cuadrada de la Matriz $A^{1/2}$

Utilizamos la fórmula de la raíz cuadrada de una matriz diagonalizable:

$A^{1/2}=PD^{1/2}P^{-1}$

Multiplicando las matrices:

1. Multiplicación $PD^{1/2}$**:**

$$PD^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\cdot 2^{1/4} & -\sqrt{2}\cdot 2^{1/4} \\ 1\cdot 0 & 1\cdot 2^{1/4} & 1\cdot i2^{1/4} \\ -1\cdot 0 & 1\cdot 2^{1/4} & 1\cdot i2^{1/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\cdot 2^{1/4} & -\sqrt{2}\cdot 2^{1/4} \\ 0 & 2^{1/4} & i2^{1/4} \\ 0 & 2^{1/4} & i2^{1/4} \end{pmatrix}$$

2. Multiplicación $(PD^{1/2})\ P^{-1}$:

Al realizar esta multiplicación, obtenemos:

$$A^{1/2} = \begin{pmatrix} 0.5946 + 0.5946i & 0.4204 - 0.4204i & 0.4204 - 0.4204i \\ 0.4204 - 0.4204i & 0.2973 + 0.2973i & 0.2973 + 0.2973i \\ 0.4204 - 0.4204i & 0.2973 + 0.2973i & 0.2973 + 0.2973i \end{pmatrix}$$

Para redes pequeñas, podemos decir que los valores en $A^{1/2}$ mostrarían una influencia moderada entre usuarios que no están directamente conectados, pero que tienen intermediarios.

Propagación de influencia

Para analizar cómo la influencia de un usuario (por ejemplo, A) se propaga indirectamente, se puede ver que aunque B y C no están directamente conectados, A puede actuar como un intermediario. En una matriz $A^{1/2}$, podríamos ver valores pequeños en las entradas (B,C) y (C,B) que reflejan que, aunque no están directamente conectados, hay una ruta indirecta (a través de A) que permite la influencia. Los valores más altos indican una mayor influencia potencial a través de conexiones indirectas. Esto ayuda a identificar nodos que tienen un impacto significativo en la red debido a su posición estratégica.

En esencia, lo que la raíz cuadrada de la matriz de adyacencia podría representar es una forma de calcular la "fuerza" de las conexiones indirectas, que no son inmediatas, pero que afectan a los usuarios conectados a través de otros nodos. En redes sociales, esto puede ser clave para comprender cómo se propaga la información o la influencia a través de la red, incluso si dos usuarios no están directamente conectados entre sí. Los valores no cero en posiciones que originalmente eran cero indican posibles caminos de influencia indirecta.

Pol. Con. (Edición núm. 101) Vol. 9, No 12, Diciembre 2024, pp. 3457-3467, ISSN: 2550 - 682X

Resultados y discusión

Se realiza a continuación la interpretación de los valores de algunos elementos de $A^{1/2}$

1. **Entrada $A^{1/2}_{1,1} = 0.5946 + 0.5946i$**

Esto representa una conexión indirecta o la auto-conexión del nodo 1 (Usuario A).

Parte real: 0.59460 indica una conexión indirecta moderada o un grado de influencia de A sobre sí mismo.

Parte imaginaria: 0.5946i puede representar algún tipo de desplazamiento de fase o retraso en la influencia. Esto podría interpretarse como la influencia interna del nodo A, pero con cierta "complicación" o retraso en cómo esa influencia se refleja de nuevo en sí mismo.

2. **Entrada $A^{1/2}_{1,2} = 0.4204 - 0.4204i$**

Esta entrada describe la conexión entre los nodos 1 (A) y 2 (B).

Parte real: 0.4204 indica una influencia indirecta entre A y B, que es menor que la auto-conexión de A.

Parte imaginaria: $-0.4204\ i$ implica un retraso o diferencia de fase en la influencia entre A y B. Esto sugiere que, aunque están conectados indirectamente, el impacto no es inmediato o puede haber alguna demora en cómo se propaga la influencia.

3. **Entrada $A^{1/2}_{2,3} = 0.2973 + 0.2973i$**

Esta entrada describe la conexión indirecta entre los nodos 2 (B) y 3 (C).

Parte real: 0.29730 indica una influencia indirecta bastante débil entre B y C. No hay una conexión directa entre estos dos nodos, pero existe una vía indirecta.

Parte imaginaria: +0.2973i podría representar un ligero desfasaje positivo en la propagación de la influencia entre B y C. Esto podría ocurrir porque su conexión indirecta pasa a través de otro nodo (en este caso, A), lo que introduce una ligera complejidad en la influencia mutua.

Como se ha mencionado, en el presente trabajo se muestra un ejemplo sencillo tanto de la red como del análisis a través de la raíz cuadrada de su matriz de adyacencia, existen trabajos de análisis de redes sociales más complejas, como el realizado por (De la Rosa Troyano, Martínez Gasca, González Abril, & Velasco Morente, 2005), donde se muestra el estudio de una red de autores y co-autores de la comunidad científica de las Jornadas de Ingeniería del Software y Bases de Datos (JISBD), usando un marco teórico que detalla la dinámica de los sistemas modelados en forma de redes.

Conclusiones

La matriz raíz cuadrada de una matriz de adyacencia proporciona información sobre conexiones que no son visibles directamente en la matriz de adyacencia original. La parte real de los elementos de la raíz cuadrada de la matriz de adyacencia indica la magnitud de la conexión indirecta. Las entradas complejas (con parte imaginaria) indican que la propagación de la influencia no es simple y directa, con interacciones indirectas no triviales, sugiriendo que hay una dinámica más compleja en la propagación de influencias, lo que podría representar retrasos o cambios en la forma en que los usuarios de la red se influyen entre sí, lo que implica que estamos tratando con una matriz que puede estar describiendo relaciones más profundas y dinámicas en la red, tal como influencias indirectas complejas o probabilidades de conexiones no evidentes a simple vista.

Referencias

1. Aguado, A. (2006). Algoritmo de control predictivo-adaptable en el espacio de pseudo-estados (Vol. 3).
2. Asmar Charris, A., & Menco Mendoza José T. (1995). Acerca de la raíz cuadrada de una matriz. Revista de La Facultad de Ciencias Universidad de Colombia, 5(1), 89–95.
3. Carnivali, G. S., Vieira, A. B., Esquef, P. A. A., & Ziviani, A. (2020). Método Rápido de Agrupamento de Vértices para Detecção de Comunidades em Redes Complexas de Larga-escala. https://doi.org/10.5753/wperformance.2018.3332
4. Castillo Garcia, L. J., & Huerta Rivera, C. A. (2015). Algoritmos para el cálculo de la raíz cuadrada de una matriz no singular. Universidad de Sonora, Navojoa,Sonora.
5. Castillo, J., Palma García, M. de las O., & Gómez Jacinto, L. (2017). Abordando el reto de la transformación digital desde el Trabajo Social. Documentos de Trabajo Social: Revista de Trabajo Social y Acción Social, 60.
6. De la Rosa Troyano, F. F., Martínez Gasca, R., González Abril, L., & Velasco Morente, F. (2005). Análisis de Redes Sociales mediante Diagramas Estratégicos y Diagramas Estructurales. REDES- Revista Hispana Para El Análisis de Redes Sociales, 8(2), 1–33. Retrieved from http://revista-redes.rediris.es
7. Funez, W. (2021). Identificación aproximada de señales en reconocimiento de patrones mediante la descomposición en modo dinámico (DMD) y la teoría de Koopman. Revista de La Escuela de Física, 9(2). https://doi.org/10.5377/ref.v9i2.13902

8. Hanneman, R. A. (2001). Introducción a los métodos del análisis de redes sociales (M. Á. Petrizzo, Trans.). Retrieved from http://revista-redes.rediris.es/webredes/textos/cap4.pdf
9. Iannazzo, B. (2003). A note on computing the matrix square root. Calcolo, 40(4), 273–283. https://doi.org/10.1007/s10092-003-0079-9
10. Mendoza Mexía, A., Rubén, O., & Aldama, G. (2010). Un método simplificado de Newton para calcular la raíz de una matriz real simétrica definida positiva. In Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing (Vol. 26, pp. 47–53).
11. Nazari, A., Fereydooni, H., & Bayat, M. (2013). A manual approach for calculating the root of square matrix of dimension ≤. In Mathematical Sciences (Vol. 7). Retrieved from http://www.iaumath.com/content/7/1/xx
12. Paletta, F. C., & Moreiro-González, J.-A. (2021). La transformación digital en los métodos y temas de la investigación brasileña de Información y Documentación 2010-2019. Revista Española de Documentación Científica, 44(2). https://doi.org/10.3989/redc.2021.2.1763
13. Pernice, S. A. (2024). Descomposición en valores singulares y análisis de factores en ciencias humanas y sociales. Revista de Métodos Cuantitativos Para La Economía y La Empresa. https://doi.org/10.46661/rev.metodoscuant.econ.empresa.8004
14. Pho, K. H. (2022). Improvements of the Newton–Raphson method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 408. https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114106
15. Rodríguez, J. R. G., Arechiga, R. S., Troncoso, J. F., Delgado, S. I., Abdalá, V. I. R., Flores, J. L. A., … Díaz, J. M. P. (2022). Optimización discreta basada en algoritmos genéticos para generación de topología de redes de comunicaciones interconectadas por medios guiados. South Florida Journal of Development, 3(2). https://doi.org/10.46932/sfjdv3n2-029
16. Rubiales Camino, E. (2005). Raíz cuadrada de una matriz. Boletín de La Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, (71), 31–46. Retrieved from https://www.ucm.es/data/cont/media/www/pag-89521/Boletin%2071%20de%20Soc%20PUIG%20ADAM.pdf
17. Sereeter, B., Vuik, C., & Witteveen, C. (2019). On a comparison of Newton–Raphson solvers for power flow problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 360. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.04.007

Pol. Con. (Edición núm. 101) Vol. 9, No 12, Diciembre 2024, pp. 3457-3467, ISSN: 2550 - 682X

18. Syafii, M., Ridhallah, R., & Nur, R. A. (2023). Penerapan Metode Newton Raphson untuk Pencarian Akar pada Fungsi Kompleks. JOSTECH Journal of Science and Technology, 3(1). https://doi.org/10.15548/jostech.v3i1.5685