



Simulación Numérica del Modelo de Lighthill-Whitham-Richards mediante el Método de Diferencias Finitas

Numerical Simulation of the Lighthill-Whitham-Richards Model using the Finite Difference Method

Simulação Numérica do Modelo Lighthill-Whitham-Richards utilizando o Método das Diferenças Finitas

Alex Eduardo Pozo-Valdiviezo ^I
eduardo.pozo@epoch.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0003-0480-5669>

Andrea Belén Paredes-Fonseca ^{II}
paredesandrex@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0002-5636-3313>

Correspondencia: eduardo.pozo@epoch.edu.ec

Ciencias Técnicas y Aplicadas
Artículo de Investigación

* **Recibido:** 19 de abril de 2024 * **Aceptado:** 03 de mayo de 2024 * **Publicado:** 09 de junio de 2024

- I. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Ecuador.
- II. Investigador Independiente, Ecuador.

Resumen

La congestión del tráfico vehicular representa un problema crítico en áreas urbanas. Este estudio se enfoca en la ecuación Lighthill-Whitham-Richards (LWR) para modelar el flujo de tráfico vehicular, implementando dos esquemas de diferencias finitas: Forward-Time Backward-Space (FTBS) y DuFort-Frankel, utilizando Python para la simulación y análisis del tráfico. Los resultados indican que el esquema FTBS es más adecuado para la ecuación LWR debido a su convergencia y capacidad de aproximar correctamente la solución. El análisis de consistencia, estabilidad y convergencia confirmó que el esquema FTBS ofrece una solución precisa y estable, haciéndolo ideal para aplicaciones prácticas en la modelación del tráfico vehicular. En contraste, el esquema DuFort-Frankel, aunque consistente con la ecuación de difusión, no es adecuado para la ecuación LWR debido a su naturaleza hiperbólica. Este trabajo proporciona una herramienta eficaz para abordar la congestión del tráfico vehicular a través de simulaciones numéricas.

Palabras clave: Tráfico vehicular; Congestión del tráfico; Ecuación Lighthill-Whitham-Richards; Diferencias finitas; Esquema Forward-Time Backward-Space; Esquema DuFort-Frankel.

Abstract

La congestión del tráfico de vehículos representa un problema crítico en las zonas urbanas. Este estudio se centra en el sistema Lighthill-Whitham-Richards (LWR) para modelar el flujo de tráfico de vehículos, implementando esquemas de diferencias finitas: Forward-Time Backward-Space (FTBS) y DuFort-Frankel, utilizando Python para simulación y análisis de tráfico. Los resultados indican que el esquema FTBS es más adecuado para la ecuación LWR debido a su convergencia y capacidad para aproximar correctamente la solución. El análisis de coherencia, estabilidad y convergencia confirmó que el esquema FTBS ofrece una solución precisa y estable, lo que lo hace ideal para aplicaciones prácticas en el modelado del tráfico de vehículos. Por el contrario, el esquema de DuFort-Frankel, aunque consistente con la ecuación de difusión, no es adecuado para la ecuación LWR debido a su naturaleza hiperbólica. Este trabajo proporciona una herramienta eficaz para abordar la congestión del tráfico de vehículos mediante simulaciones numéricas.

Palabras clave: Tráfico de vehículos; La congestión del tráfico; Ecuación Lighthill-Whitham-Richards; Diferencias finitas; Esquema de avance-tiempo-retroespacio; Esquema DuFort-Frankel.

Resumo

O congestionamento do tráfico automóvel representa un problema crítico nas áreas urbanas. Este estudo foca-se na ecuación de Lighthill-Whitham-Richards (LWR) para modelar o fluxo de tráfico de vehículos, implementando dous esquemas de diferenzas finitas: Forward-Time Backward-Space (FTBS) e DuFort-Frankel, utilizando o Python para simulación e análise de tráfico. Os resultados indican que o esquema FTBS é máis adecuado para a ecuación LWR debido á súa converxencia e capacidade de aproximar correctamente a solución. A análise de consistencia, estabilidade e converxencia confirmou que o esquema FTBS ofrece unha solución precisa e estável, tornando-o ideal para aplicacións prácticas na modelación de tráfico de vehículos. En contraste, o esquema DuFort-Frankel, embora consistente con a ecuación de difusión, non é adecuado para a ecuación LWR debido á súa natureza hiperbólica. Este traballo fornece unha ferramenta eficaz para lidar con o congestionamento do tráfico de vehículos através de simulacións numéricas.

Palavras-chave: Tráfico de vehículos; tráfico congestionado; Ecuación de Lighthill-Whitham-Richards; Diferenzas finitas; Esquema do espazo retroativo no futuro; Esquema DuFort-Frankel.

Introducción

La congestión del tráfico vehicular es un problema crítico que afecta a numerosas áreas urbanas a nivel mundial, generando pérdidas económicas, contaminación ambiental y deterioro en la calidad de vida de los ciudadanos. Este estudio se enfoca en modelar el flujo de tráfico vehicular mediante la ecuación Lighthill-Whitham-Richards (LWR), una ecuación diferencial parcial hiperbólica que describe la conservación del número de vehículos en una carretera.

El objetivo de esta investigación es implementar y analizar dos esquemas de diferencias finitas, Forward-Time Backward-Space (FTBS) y DuFort-Frankel, utilizando Python para la simulación y análisis del tráfico vehicular. Este estudio busca determinar cuál de estos esquemas proporciona una solución más precisa y estable para la ecuación LWR.

La relevancia de este estudio radica en la necesidad de encontrar métodos eficientes y precisos para modelar el tráfico vehicular, lo que puede contribuir significativamente a la planificación urbana y a la implementación de medidas para mitigar la congestión del tráfico. La utilidad de estos modelos matemáticos se extiende a la optimización de sistemas de transporte y la mejora en la gestión del tráfico.

La fundamentación teórica de este estudio se basa en la revisión de la literatura existente sobre modelos matemáticos de tráfico vehicular. La ecuación Lighthill-Whitham-Richards, propuesta por Lighthill y Whitham (1955) y Richards (1956), es uno de los modelos más utilizados para describir el flujo de tráfico. Los métodos numéricos, como los esquemas de diferencias finitas, son herramientas fundamentales en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales. El esquema FTBS, conocido por su simplicidad y eficiencia en problemas hiperbólicos, y el esquema DuFort-Frankel, utilizado frecuentemente en ecuaciones de difusión, fueron seleccionados para este estudio debido a sus características específicas y su potencial aplicación en la modelación del tráfico.

Materiales y Métodos

Materiales

En esta investigación se utilizaron los siguientes materiales:

- Lenguaje de programación Python.
- Ordenador y equipos de oficina.

Metodología

La presente investigación se centró en la aplicación del método de diferencias finitas para la simulación del modelo Lighthill-Whitham-Richards (LWR), el cual describe el flujo vehicular y así obtener una visualización de los perfiles de densidad del tráfico en una vía específica. Mediante el uso de este método numérico, se buscó proporcionar una representación detallada y precisa de cómo varía la densidad vehicular a lo largo del tiempo y el espacio, permitiendo así una mejor comprensión de los patrones de tráfico y facilitando la toma de decisiones informadas en la gestión y planificación del transporte.

La formalización del problema se puede describir de la siguiente manera: el modelo LWR se basa en una ecuación diferencial parcial hiperbólica que representa la conservación del número de vehículos (Omkar & Kumar, 2018). Este modelo se resuelve utilizando esquemas de diferencias finitas, que permiten discretizar tanto el tiempo como el espacio, transformando así las ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones algebraicas que pueden ser resueltas de manera iterativa (Treiber & Kesting, 2013).

La implementación de estos esquemas se realizó en Python, utilizando bibliotecas como NumPy para el manejo eficiente de matrices y operaciones numéricas. La precisión y estabilidad de los esquemas de diferencias finitas fueron evaluadas para asegurar que los resultados obtenidos sean fiables y representativos del comportamiento real del tráfico vehicular.

En resumen, la metodología adoptada en esta investigación no solo permitió simular el modelo LWR de manera efectiva, sino que también proporcionó herramientas analíticas para la visualización y comprensión de los perfiles de densidad de tráfico, contribuyendo significativamente a la literatura existente sobre la gestión del flujo vehicular y la optimización del transporte.

Modelo Matemático

La ecuación Lighthill-Whitham-Richards se utiliza para modelar el flujo de tráfico vehicular. Esta ecuación se describe mediante una ecuación diferencial parcial hiperbólica que representa la conservación del número de vehículos.

El análisis y modelado del tráfico vehicular comenzó en los años 30 con Bruce Douglas Greenshields, quien fue pionero en el uso de métodos fotográficos y matemáticos para medir diferentes variables relacionadas con el flujo de tráfico y describir su comportamiento (Greenshields et al., 1934). Greenshields propuso una relación lineal entre la velocidad y la densidad del tráfico, expresada como $u = F(1 - k/K)$, donde F es la velocidad de flujo y K es la densidad del tráfico.

En 1955, James Lighthill y Gerald Whitham formularon una ecuación diferencial que describe el flujo de tráfico utilizando la dinámica de fluidos (Lighthill & Whitham, 1955). Este modelo, conocido como el modelo Lighthill-Whitham-Richards (LWR), considera que ningún vehículo entra o sale de la vía, conservándose así el número total de vehículos. Al aplicar la ecuación de conservación de masa para cualquier problema de flujo en un dominio acotado y fijo, se tiene que la densidad del tráfico en el punto x y en el tiempo t , denotada por $k(t, x)$, satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial k(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

donde $q(t, x)$ es el flujo de tráfico, que está relacionado con la densidad $k(t, x)$ y la velocidad $u(t, x)$ por la relación fundamental:

$$q(t, x) = k(t, x)u(t, x). \quad (2)$$

La ecuación de Lighthill-Whitham-Richards es una ecuación diferencial parcial hiperbólica que captura la dinámica del flujo de tráfico vehicular, proporcionando una herramienta esencial para el análisis y predicción del comportamiento del tráfico (Richards, 1956).

A continuación, se considera el problema de valor inicial dependiente del tiempo, definido en un dominio acotado $\Omega =]0, L[$, donde se busca $k: [0, L] \times \Omega \rightarrow R$ tal que:

$$\begin{cases} \frac{\partial k(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} = 0, & \forall t \in]0, T[, \quad \forall x \in \Omega \\ k(0, x) = k_0(x), & \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (3)$$

Adicionalmente, la densidad de tráfico de los vehículos está relacionada con el flujo q y la velocidad u según la siguiente relación:

$$q(k) = ku(k). \quad (4)$$

El modelo de Greenshields conecta la densidad de tráfico k y la velocidad del tráfico u mediante una relación lineal expresada como:

$$u(k) = u_{\max}(1 - k/k_{\max}). \quad (5)$$

donde u representa la velocidad del tráfico en una densidad de tráfico dada; u_{\max} es la velocidad de flujo libre, que representa la velocidad máxima cuando la densidad del tráfico es baja, y k_{\max} es la densidad máxima de tráfico que la carretera puede manejar sin congestión.

Es crucial que el modelo LWR esté bien formulado, asegurando que sus soluciones garanticen existencia, unicidad y estabilidad. Estas propiedades son fundamentales para que el problema tenga soluciones significativas, estables y predecibles. En el artículo "Coupling of Lighthill-Whitham-Richards and Phase Transition Models" se demuestra la existencia de soluciones al problema de Cauchy con datos iniciales arbitrarios de variación acotada, utilizando la técnica de seguimiento del frente de onda. Adicionalmente, el artículo "The Entropy Solutions for the Lighthill-Whitham-Richards Traffic Flow Model with a Discontinuous Flow-Density Relationship" ofrece una perspectiva detallada sobre las soluciones de entropía en el contexto del modelo LWR con una relación flujo-densidad discontinua. Estos estudios son esenciales para entender las condiciones bajo las cuales el modelo LWR proporciona resultados confiables y aplicables en la gestión y optimización del tráfico vehicular.

Discretización del modelo mediante diferencias finitas

La discretización del modelo LWR mediante esquemas de diferencias finitas es un enfoque efectivo para transformar las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales en sistemas de ecuaciones algebraicas que pueden ser resueltas numéricamente. Este método permite aproximar las soluciones de la ecuación LWR utilizando un conjunto finito de puntos en el tiempo y el espacio, facilitando su implementación en programas de simulación computacional. En este contexto, los esquemas de diferencias finitas, como el esquema Forward-Time Backward-Space (FTBS) y el esquema DuFort-Frankel, se emplean para discretizar la ecuación LWR. Estos esquemas ofrecen propiedades únicas en términos de estabilidad, consistencia y convergencia, y su correcta implementación es esencial para garantizar la validez de los resultados obtenidos.

Discretización del dominio

Para discretizar el dominio $[0, T] \times \Omega$ con $T > 0$, utilizamos una malla que divide tanto el espacio Ω como el intervalo de tiempo $[0, T]$ en partes finitas. En primer lugar, la discretización del espacio se realiza considerando $\Omega = [a, b]$, un intervalo en el espacio. Este intervalo se divide en N subintervalos iguales, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{N}$. Los puntos discretos en el espacio se denotan por $x_j = a + j\Delta x$ para $j = 0, 1, 2, \dots, N$. En cuanto a la discretización del tiempo, consideramos el intervalo $[0, T]$. Este intervalo se divide en M subintervalos iguales, cada uno de longitud $\Delta t = \frac{T}{M}$. Los puntos discretos en el tiempo se denotan por $t^n = n\Delta t$ para $n = 0, 1, 2, \dots, M$. La malla en el dominio $[0, T] \times \Omega$ se define por los pares (t^n, x_j) , donde x_j es un punto en el espacio y t^n es un punto en el tiempo. Esta malla crea una cuadrícula de puntos en la cual se evaluarán las aproximaciones numéricas, permitiendo la implementación de métodos numéricos para la simulación del modelo Lighthill-Whitham-Richards (LWR).

Esquema FTBS

Para llevar a cabo la formulación en diferencias finitas de la ecuación LWR mediante el esquema FTBS, se emplea una aproximación hacia adelante para la derivada temporal y una aproximación hacia atrás para la derivada espacial. La ecuación diferencial parcial se discretiza de la siguiente manera:

- Modelo LWR

$$\frac{k_j^{n+1} - k_j^n}{\Delta t} + \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (6)$$

- Relación fundamental de flujo de tráfico:

$$q_j^n = u_j^n k_j^n. \quad (7)$$

- Relación entre velocidad y densidad:

$$u_j^n = F\left(1 - \frac{k_j^n}{K}\right). \quad (8)$$

Combinando estas ecuaciones, se obtiene la siguiente formulación en diferencias finitas:

$$k_j^{n+1} = k_j^n \left[1 - r\left(1 - \frac{k_j^n}{K}\right)\right] + k_{j-1}^n \left[r\left(1 - \frac{k_{j-1}^n}{K}\right)\right], \quad (9)$$

donde $r = \frac{\Delta t}{\Delta x} F$, $c = \frac{k_j^n}{K}$ y $d = \frac{k_{j-1}^n}{K}$.

Esquema DuFort-Frankel

El esquema DuFort-Frankel utiliza una aproximación central de primer orden para la derivada temporal y una aproximación central de segundo orden para la derivada espacial. La ecuación de conservación (1) se discretiza de la siguiente manera:

- Modelo LWR:

$$\frac{\partial k}{\partial t} \approx \frac{k_j^{n+1} - k_j^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (10)$$

y

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \approx \frac{q_{j+1}^n - 2q_j^n + q_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (11)$$

Reemplazando el término q_j^n por $\frac{q_j^{n+1} + q_j^{n-1}}{2}$ en (11), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \approx \frac{q_{j+1}^n - q_j^{n+1} - q_j^{n-1} + q_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (12)$$

De modo que (2.23) quedará discretizada cómo sigue:

$$\frac{k_j^{n+1} - k_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{q_{j+1}^n - q_j^{n+1} - q_j^{n-1} + q_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0. \quad (13)$$

- Relación fundamental de flujo de tráfico:

$$q_j^n = u_j^n k_j^n. \quad (14)$$

- Relación entre velocidad y densidad:

$$u_j^n = F \left(1 - \frac{k_j^n}{K} \right). \quad (15)$$

Por ende, la formulación en diferencias finitas del esquema DuFort-Frankel se expresa como:

$$k_j^{n+1} = k_j^n \left[1 - 2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} F \left(1 - \frac{k_j^n}{K} \right) \right] + k_{j-1}^n \left[2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} F \left(1 - \frac{k_{j-1}^n}{K} \right) \right] + k_{j+1}^n \left[2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} F \left(1 - \frac{k_{j+1}^n}{K} \right) \right]. \quad (16)$$

Estabilidad, Consistencia y Convergencia de los esquemas

El análisis de las propiedades de estabilidad, consistencia y convergencia de los esquemas FTBS y DuFort-Frankel es crucial para garantizar la precisión y la validez de las soluciones numéricas obtenidas.

La **consistencia** de un esquema numérico indica su capacidad para aproximarse a la ecuación diferencial original a medida que los pasos de discretización tienden a cero, lo cual se verifica mediante el desarrollo de Taylor para los esquemas FTBS y DuFort-Frankel en el modelo LWR. La **estabilidad** implica que los errores no se amplifiquen significativamente a lo largo del tiempo, evaluada mediante el análisis de Von Neumann, que demuestra la estabilidad de ambos esquemas bajo ciertas condiciones (Smith, 1985). La **convergencia** asegura que, al refinar la discretización, la solución numérica se aproxima a la solución exacta, cumpliendo los esquemas FTBS y DuFort-Frankel con este criterio según el Teorema de Lax.

Consistencia de los Esquemas

Teorema: El esquema FTBS (9) de la ecuación LWR es un esquema consistente.

Demostración. Para probar que el esquema FTBS es consistente, se usa el desarrollo de Taylor de k_j^{n+1} y q_{j-1}^n con el fin de hallar el error de truncamiento. Para el caso de k_j^{n+1} , se utilizan los cuatro primeros términos del desarrollo de Taylor al igual que en el caso de q_{j-1}^n , con el fin de aproximar la ecuación (6), es decir:

$$\frac{k_j^{n+1} - k_j^n}{\Delta t} + \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

$$\frac{k_j^n + \Delta t \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3) - k_j^n}{\Delta t} + \frac{q_j^n - \left[q_j^n - \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \mathcal{O}((\Delta t)^3) \right]}{\Delta x} = 0. \quad (17)$$

$$\frac{\Delta t \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3)}{\Delta t} + \frac{\Delta x \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3)}{\Delta x} = 0.$$

$$\frac{\partial(k)}{\partial(t)} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) + \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) = 0. \quad (18)$$

A continuación, se reescribe la ecuación (18) como sigue:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) = 0. \quad (19)$$

Según el modelo LWR, la ecuación (6) se expresa como:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Por tanto, la ecuación (19) quedará como sigue:

$$\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) = 0. \quad (20)$$

Por ende, el error de consistencia para este esquema viene dado por:

$$e_{\Delta x, \Delta t} := \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2). \quad (21)$$

Y si Δx como Δt tienden a cero, se tiene como resultado que:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} e_{\Delta x, \Delta t} = 0. \quad (22)$$

Esta expresión indica que conforme los intervalos de espacio y tiempo se hacen infinitesimalmente pequeños, el error de consistencia tiende a cero. Por lo tanto, se puede concluir que el esquema FTBS es consistente y presenta un error cuadrático tanto en tiempo como en espacio.

Teorema: El esquema DuFort-Frankel (16) de la ecuación LWR es un esquema consistente.

Demostración. Para probar que el esquema DuFort-Frankel es consistente, se usa el desarrollo de Taylor de $k_j^{n\pm 1}$, $q_j^{n\pm 1}$ y $q_{j\pm 1}^n$, con el fin de hallar el error de truncamiento. Para el caso de $k_j^{n\pm 1}$, se utilizan los tres primeros términos del desarrollo de Taylor al igual que en el caso de $q_j^{n\pm 1}$, mientras

que en el caso de $q_{j\pm 1}^n$ se utilizarán los cinco primeros términos del desarrollo de Taylor, para aproximar la ecuación (13), es decir:

$$\frac{k_j^{n+1} - k_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{q_{j+1}^n - q_j^{n+1} - q_j^{n-1} + q_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0.$$

De donde se ve que,

$$\begin{aligned} & \frac{k_j^n + \Delta t \frac{\partial k}{\partial t} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) - \left[k_j^n - \Delta t \frac{\partial k}{\partial t} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \right]}{2\Delta t} \\ & + \frac{- \left[q_j^n + \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \right] - \left[q_j^n - \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \right]}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{q_j^n + \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^4) + q_j^n - \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^4)}{(\Delta x)^2} \\ & = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Al simplificar se tiene:

$$\frac{2\Delta t}{2\Delta t} \frac{\partial k}{\partial t} - \frac{2q_j^n}{(\Delta x)^2} - \frac{2\mathcal{O}((\Delta t)^2)}{(\Delta x)^2} + \frac{2q_j^n + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2\mathcal{O}((\Delta x)^4)}{(\Delta x)^2} = 0. \quad (24)$$

y a su vez,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2\mathcal{O}((\Delta x)^2) - 2\mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) = 0. \quad (25)$$

Ahora resta hallar el error de consistencia, denotado por $e_{\Delta x, \Delta t}$:

$$e_{\Delta x, \Delta t} = \underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}}_{=0} + 2\mathcal{O}((\Delta x)^2) + 2\mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right), \quad (26)$$

y así se ve que

$$e_{\Delta x, \Delta t} = 2\mathcal{O}\left((\Delta x)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right). \quad (27)$$

Ahora se halla el límite del error de consistencia cuando Δx y Δt tienden a cero:

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} e_{\Delta x, \Delta t} = 0. \quad (28)$$

Por tanto, podemos afirmar que el esquema de DuFort-Frankel es consistente y posee un error cuadrático tanto en tiempo como en espacio. La presencia de $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$ sugiere que el error también depende de la relación entre Δx y Δt . Esta relación es importante en esquemas numéricos, ya que afecta la estabilidad y la precisión del método. Cuando la relación $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ es grande, se puede esperar que este término contribuya significativamente al error de consistencia.

Estabilidad de los Esquemas

Teorema: El esquema FTBS (9) es condicionalmente estable en la norma L^2 , siempre y cuando se cumpla la condición CFL $\frac{\Delta t}{\Delta x} u \leq 1$.

Demostración. Se parte de (6), es decir:

$$\frac{k_j^{n+1} - k_j^n}{\Delta t} + \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

De donde,

$$\frac{A^{n+1} e^{2i\pi jx} - A^n e^{2i\pi jx}}{\Delta t} + \frac{A^n e^{2i\pi jx} - A^n e^{2i\pi(j-1)x}}{\Delta x} = 0. \quad (29)$$

Multiplicamos (29) por Δt , obteniendo así:

$$A^{n+1} e^{2i\pi jx} - A^n e^{2i\pi jx} + \frac{\Delta t}{\Delta x} A^n (e^{2i\pi jx} - e^{2i\pi(j-1)x}) = 0.$$

Dividimos para $e^{2i\pi jx}$:

$$A^{n+1} - A^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} A^n e^{-2i\pi x} = 0.$$

Arribando a:

$$A - 1 = \frac{\Delta t}{\Delta x} (e^{2i\pi x} - u).$$

Por propiedades del módulo, se tiene:

$$|A| = \left| 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (e^{2i\pi x} - u) \right| \leq 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} |e^{2i\pi x} - u|.$$

De donde:

$$1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} |e^{2i\pi x} - u| \leq 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} [|e^{2i\pi x}| + |u|].$$

Así:

$$|A| \leq 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 + u) \leq 1.$$

Donde:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} (1 + u) \leq 1, \quad \text{si y solo si} \quad (1 + u)\Delta t \leq \Delta x.$$

Además, se tiene que:

$$1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} u(1 - e^{-2i\pi x}). \quad (30)$$

Recordemos que $e^{-2i\pi x} = \cos(2\pi x) - i \sin(2\pi x)$, con lo cual:

$$1 - e^{-2i\pi x} \geq 1 - \cos(2\pi x).$$

Por tanto, se sigue que (30) cumple la siguiente desigualdad:

$$1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} u(1 - e^{-2i\pi x}) \leq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} u(1 - \cos(2\pi x)).$$

Entonces $|A| \leq \left| 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} u(1 - \cos(2\pi x)) \right| \leq 1$ si, y solo si,

$$0 \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} u(1 - \cos(2\pi x)) \leq 2.$$

Para que se cumpla la desigualdad $\frac{\Delta t}{\Delta x} u(1 - \cos(2\pi x)) \leq 2$, dado el hecho de que $1 - \cos(2\pi x) \leq 1$, es necesario que $\frac{\Delta t}{\Delta x} u \leq 1$. Por lo tanto,

$$u \Delta t \leq \Delta x.$$

Por consiguiente, concluimos que el esquema FTBS es condicionalmente estable, siempre que

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} u \leq 1.$$

Teorema: El esquema DuFort-Frankel (16) es condicionalmente estable para la norma L^2 siempre y cuando se cumpla la condición CFL $\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1$.

Demostración. Se parte de (13)

$$\frac{k_j^{n+1} - k_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{q_{j+1}^n - q_j^{n+1} - q_j^{n-1} + q_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0.$$

Se reescribe, teniendo en cuenta que $k_j^n = A^n e^{2i\pi jx}$, obteniendo así:

$$\frac{A^{n+1} e^{2i\pi jx} - A^{n-1} e^{2i\pi jx}}{2\Delta t} + \frac{A^n e^{2i\pi(j+1)x} - A^{n+1} e^{2i\pi jx} - A^{n-1} e^{2i\pi jx} + A^n e^{2i\pi(j-1)x}}{(\Delta x)^2} = 0.$$

Multiplicamos por $2\Delta t$ y a continuación dividimos para $e^{2i\pi jx}$

$$A^{n+1} - A^{n-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^n e^{2i\pi x} - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^{n+1} - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^{n-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^n e^{-2i\pi x} = 0.$$

Dividimos para A^n

$$A - A^{-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} e^{2i\pi x} - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^{-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} e^{-2i\pi x} = 0,$$

de donde

$$A - A^{-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} (e^{2i\pi x} + e^{-2i\pi x}) - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^{-1} = 0.$$

Recordemos que $\cos(2\pi x) = \frac{e^{2i\pi x} + e^{-2i\pi x}}{2}$, de donde se sigue que $e^{2i\pi x} + e^{-2i\pi x} = 2 \cos(2\pi x)$ y así

$$A - A^{-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} [2 \cos(2\pi x)] - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^{-1} = 0.$$

Simplificando términos, se arriba

$$A - 1 = \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A - 2 \cos(2\pi x). \quad (31)$$

De manera análoga a la demostración de la estabilidad del esquema FTBS, llegamos a la condición CFL para el esquema de DuFort-Frankel, la cual está dada por $2\Delta t \leq (\Delta x)^2$.

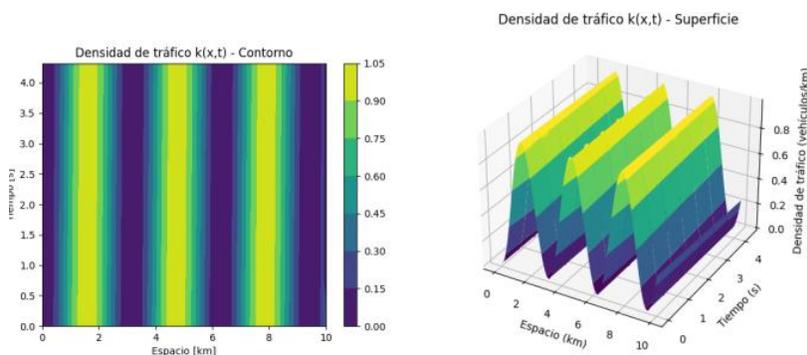
Convergencia de los Esquemas

Para determinar la consistencia de ambos esquemas, recurrimos al Teorema de Lax, el cual establece que un método numérico es convergente si y solo si es consistente y estable (Allaire, 2007). Por lo tanto, dado que tanto el esquema FTBS como el esquema de DuFort-Frankel son consistentes y estables, también son métodos convergentes. Esto significa que, en los resultados obtenidos, los niveles de error disminuirán de la manera más rápida posible.

Resultados

Para comprender el comportamiento del flujo de tráfico vehicular, se realizaron simulaciones numéricas de los esquemas FTBS y DuFort-Frankel. Se consideraron parámetros como una velocidad de flujo libre de 50 km/h, una densidad máxima de 120 vehículos/km, una discretización espacial de 0.1 km, una discretización temporal de 0.0002 h, una longitud de prueba de 10 km y un tiempo total de simulación de 4 segundos. Los resultados de estas simulaciones mostraron que el esquema FTBS presenta una mejor descripción del modelo LWR en comparación con el esquema DuFort-Frankel. Las gráficas obtenidas revelan los perfiles de densidad del tráfico vehicular a lo largo del tiempo y el espacio, proporcionando una visión detallada del comportamiento del modelo LWR discretizado.

Gráfico 1: Densidad de tráfico vehicular.

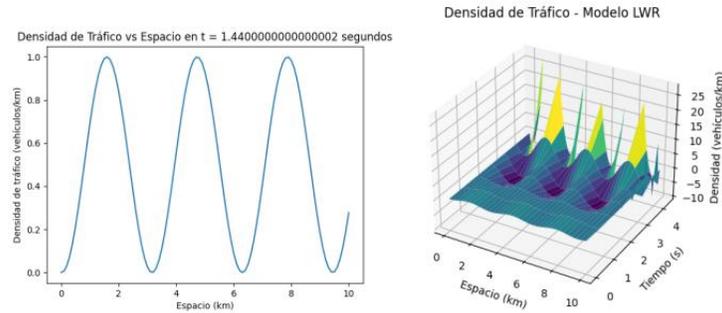


Fuente: Realización propia.

El Gráfico 1 muestra las curvas de nivel, destacando su utilidad para identificar regiones de alta y baja densidad a lo largo de la vía y en distintos momentos del tiempo. Las áreas con curvas más juntas indican cambios rápidos en la densidad, mientras que las áreas con curvas más espaciadas

representan cambios más graduales. Por otro lado, la visualización 3D de la densidad de tráfico permite una comprensión más profunda de la dinámica del tráfico, mostrando claramente las variaciones de densidad en relación con el tiempo y la ubicación. Las regiones elevadas en el eje z corresponden a áreas de alta densidad de tráfico.

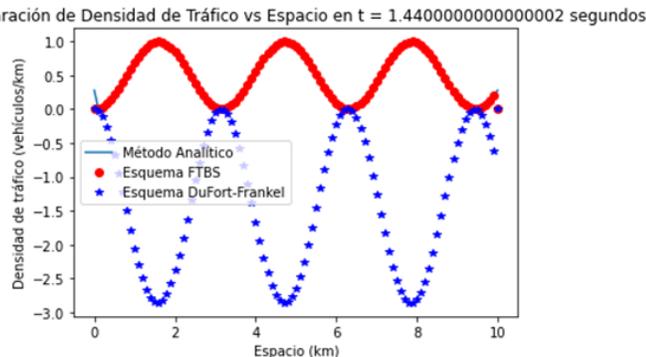
Gráfico 2: Perfil de densidad de tráfico vehicular.



Fuente: Realización propia.

El Gráfico 2 muestra las curvas de nivel, destacando su utilidad para identificar regiones de alta y baja densidad a lo largo de la vía y en distintos momentos del tiempo. Las áreas con curvas más juntas indican cambios rápidos en la densidad, mientras que las áreas con curvas más espaciadas representan cambios más graduales. Por otro lado, la visualización 3D de la densidad de tráfico permite una comprensión más profunda de la dinámica del tráfico, mostrando claramente las variaciones de densidad en relación con el tiempo y la ubicación. Las regiones elevadas en el eje z corresponden a áreas de alta densidad de tráfico.

Gráfico 3: Perfil de densidad de tráfico vehicular con los esquemas FTBS y DuFort-Frankel.



Fuente: Realización propia.

El Gráfico 3 muestra una comparación de la densidad del tráfico vehicular en función del espacio, en un instante de tiempo específico ($t = 1.44$ segundos). En el gráfico, el eje horizontal representa el espacio en kilómetros y el eje vertical muestra la densidad del tráfico en vehículos por kilómetro. La línea continua azul representa la solución analítica del modelo LWR, mientras que los puntos rojos y las estrellas azules corresponden a los resultados obtenidos mediante los esquemas numéricos FTBS y DuFort-Frankel, respectivamente. La solución analítica proporciona un perfil de densidad suave y continuo, que sirve como referencia para evaluar la precisión de los esquemas numéricos. Los resultados del esquema FTBS (puntos rojos) siguen de cerca esta solución, indicando una alta precisión en la aproximación, aunque con ligeras desviaciones.

En contraste, los resultados del esquema DuFort-Frankel (estrellas azules) presentan mayores discrepancias, mostrando una mayor variabilidad y desviaciones más notables, especialmente en las zonas de alta densidad. Esta comparación visual destaca que el esquema FTBS ofrece una aproximación más precisa y consistente con la solución analítica del modelo LWR en comparación con el esquema DuFort-Frankel, sugiriendo que FTBS es más adecuado para aplicaciones que requieren alta precisión en la simulación del flujo de tráfico vehicular.

La comparación de estos resultados es fundamental para evaluar la eficacia de los métodos numéricos en la simulación del flujo de tráfico vehicular, destacando las fortalezas y limitaciones de cada esquema en la aproximación de la solución del modelo LWR.

Validación cruzada

Los resultados del RMSE indican que el esquema FTBS es significativamente más preciso que el esquema DuFort-Frankel al simular la densidad del tráfico vehicular utilizando el modelo LWR. Con un RMSE de 0.027, el esquema FTBS proporciona una aproximación muy cercana a la solución analítica, mostrando pequeñas desviaciones. Esto lo hace adecuado para aplicaciones que requieren alta precisión en la simulación del flujo vehicular.

Tabla 1: Resultados del Error medio cuadrático residual.

Esquema Numérico	RMSE	Parámetros de simulación

FTBS	0.027	Velocidad flujo libre (F) = 50 km/h, Densidad máxima (K) = 120 vehículos/km, Discretización espacial (dx) = 0.1 km, Discretización temporal (dt) = 0.0002 h, Longitud del tramo de prueba = 10 km, Tiempo total de simulación = 4 segundos
DuFort Frankel	0.15	Velocidad flujo libre (F) = 50 km/h, Densidad máxima (K) = 120 vehículos/km, Discretización espacial (dx) = 0.1 km, Discretización temporal (dt) = 0.0002 h, Longitud del tramo de prueba = 10 km, Tiempo total de simulación = 4 segundos

Fuente: Realización propia.

Por otro lado, el esquema DuFort-Frankel, con un RMSE de 0.15, muestra mayores discrepancias en comparación con la solución analítica. Las densidades obtenidas por este esquema presentan una mayor variabilidad y desviaciones más notables, especialmente en las zonas de alta densidad. Esto sugiere que el esquema DuFort-Frankel es menos adecuado para aplicaciones que requieren alta precisión.

En ambos casos, los parámetros de simulación incluyen una velocidad de flujo libre de 50 km/h, una densidad máxima de 120 vehículos/km, una discretización espacial de 0.1 km, una discretización temporal de 0.0002 h, una longitud del tramo de prueba de 10 km y un tiempo total de simulación de 4 segundos. Con esta evaluación detallada, se puede avanzar a las conclusiones sobre la eficacia y aplicabilidad de los métodos numéricos analizados.

Conclusiones

El análisis y comparación de los esquemas numéricos FTBS y DuFort-Frankel para la simulación del modelo LWR han demostrado diferencias significativas en términos de precisión y aplicabilidad. El esquema FTBS, con un RMSE de 0.027, ha mostrado ser altamente preciso y consistente, lo que lo hace adecuado para aplicaciones que requieren simulaciones precisas del flujo vehicular. Por otro lado, el esquema DuFort-Frankel, con un RMSE de 0.15, presenta una mayor variabilidad y discrepancias, sugiriendo que es menos adecuado para escenarios que demandan alta precisión. Los parámetros de simulación utilizados, que incluyen una velocidad de flujo libre de 50 km/h, una densidad máxima de 120 vehículos/km, y discretizaciones espaciales y temporales de 0.1 km y 0.0002 h, permitieron una comparación equitativa entre los dos esquemas. Estos hallazgos subrayan la importancia de elegir el esquema numérico adecuado para garantizar

la precisión y fiabilidad de las simulaciones del tráfico vehicular, destacando la superioridad del esquema FTBS en este contexto.

La comparación de los esquemas FTBS y DuFort-Frankel mediante el cálculo del RMSE ha proporcionado una evaluación clara de la precisión de cada método, destacando la superioridad del esquema FTBS. Este análisis cumple con el objetivo de evaluar la precisión de los esquemas numéricos en la simulación del modelo LWR. Además, los parámetros de simulación utilizados (velocidad de flujo libre, densidad máxima, discretización espacial y temporal) han permitido identificar las condiciones bajo las cuales el esquema FTBS proporciona resultados precisos. Esto establece una referencia para futuras simulaciones, cumpliendo con el objetivo de determinar las condiciones óptimas de simulación para el flujo vehicular.

Por último, la aplicación de ambos esquemas bajo las mismas condiciones de simulación ha permitido validar la eficacia de cada método, destacando que el esquema FTBS es capaz de replicar con mayor precisión el comportamiento esperado del flujo vehicular. Este aspecto cumple con el objetivo de validar los resultados numéricos obtenidos mediante los esquemas de diferencias finitas.

Discusión

Este estudio comparó los esquemas numéricos FTBS y DuFort-Frankel en la simulación del modelo LWR de flujo vehicular. Los resultados mostraron que el esquema FTBS, con un RMSE de 0.027, es más preciso que el esquema DuFort-Frankel, que obtuvo un RMSE de 0.15. Estos hallazgos destacan la importancia de seleccionar el esquema adecuado para asegurar la precisión en las simulaciones de tráfico. Se utilizaron parámetros uniformes: velocidad de flujo libre de 50 km/h, densidad máxima de 120 vehículos/km, y discretizaciones espaciales y temporales de 0.1 km y 0.0002 h. La superioridad del FTBS indica su robustez para modelar el tráfico con alta precisión. A pesar de esto, el esquema DuFort-Frankel puede ser útil en contextos menos exigentes. Se recomienda probar el modelo LWR con otros esquemas, como Godunov y MacCormack (Smith, 1985), y utilizar datos reales para validar los resultados. Además, los esquemas de volúmenes finitos, por su principio de conservación, podrían ofrecer mejores aproximaciones. En conclusión, el esquema FTBS es preferido para simulaciones precisas del flujo vehicular, mientras que DuFort-Frankel es adecuado para aplicaciones menos exigentes. Estos resultados aportan al conocimiento de la modelización del tráfico y sirven como base para futuras investigaciones.

Referencias

1. Allaire, G. (2007). Numerical analysis and optimization: An introduction to mathematical modelling and numerical simulation. Oxford University Press.
2. Greenshields, B. D., Thompson, T., Dickinson, H. C., & Swinton, R. (1934). The photographic method of studying traffic behavior. Highway Research Board Proceedings, 13.
3. Lighthill, J., & Whitham, G. B. (1955). On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads. Royal Society, 229. <https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0089>
4. Omkar, G., & Kumar, S. V. (2018). FINITE DIFFERENCE FORMULATION OF LIGHTHILL WHITHAM RICHARDS MACROSCOPIC MODEL FOR TRAFFIC FLOW PREDICTION. International Journal of Applied Mathematics, 31(5). <https://doi.org/10.12732/ijam.v31i5.6>
5. Richards, P. I. (1956). Shock Waves on the Highway. Operations Research, 4(1), 42–51. <https://doi.org/10.1287/opre.4.1.42>
6. Smith, G. D. (1985). Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Oxford University Press.
7. Treiber, M., & Kesting, A. (2013). Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-32460-4>

© 2024 por los autores. Este artículo es de acceso abierto y distribuido según los términos y condiciones de la licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).