



Alternativa didáctica para reducir la ecuación de segundo grado en tres variables a su forma canónica en la educación de las matemáticas

Didactic alternative to reduce the quadratic equation in three variables to its canonical form in mathematics education

Alternativa didática para redução da equação quadrática em três variáveis à sua forma canônica na educação matemática

Nelson Salgado Reyes ^I
nsalgado@itsjapon.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0001-8908-7613>

Correspondencia: nsalgado@itsjapon.edu.ec

Ciencias de la Educación
Artículo de Investigación

* **Recibido:** 30 de diciembre de 2023 * **Aceptado:** 17 de enero de 2024 * **Publicado:** 10 de febrero de 2024

I. Instituto Superior Tecnológico Japón, Ecuador.

Resumen

Es importante que estudiantes de carreras tecnológicas dominen los procedimientos de resolución de ecuaciones cuadráticas de segundo grado con tres variables mediante productos escalares y vectoriales, dada la complejidad asociada al método de ortogonalización de Schmidt. La comprensión profunda de estos métodos alternativos no solo refleja la interrelación entre la geometría y el álgebra, sino que también prepara a los tecnólogos para abordar problemas tridimensionales de manera más eficiente.

La aplicación de productos escalares y vectoriales en la resolución de ecuaciones cuadráticas tridimensionales no solo simplifica el proceso, sino que también dota a los estudiantes con habilidades transferibles esenciales para enfrentar desafíos matemáticos y científicos complejos en diversas disciplinas. En esta investigación se presentan los resultados del trabajo realizado con los estudiantes de la carrera de Mecánica Automotriz del Instituto Superior Tecnológico Japón. Para este abordaje se utilizaron dos grupos uno de control y otro experimental en un estudio cuasi experimental.

Como resultado se observa un aumento de la calidad del aprendizaje, así como un mayor desarrollo en la habilidad para resolver problemas que conduzcan a ecuaciones de este tipo.

La justificación de este estudio radica en la búsqueda de alternativas que permitan a los docentes de la asignatura de matemáticas tener las herramientas para la enseñanza de este procedimiento en el Instituto Superior Tecnológico Japón. Así, este artículo se centra en la inserción de otro método de resolución de las ecuaciones de segundo grado en tres variables para la obtención de la ecuación en su forma canónica.

Palabras clave: Algebra lineal; Ecuación; Producto vectorial.

Abstract

It is important that students of technological careers master the procedures for solving quadratic equations of the second degree with three variables using scalar and vector products, given the complexity associated with the Schmidt orthogonalization method. Deep understanding of these alternative methods not only reflects the interrelationship between geometry and algebra, but also prepares technologists to address three-dimensional problems more efficiently.

The application of dot and vector products in solving three-dimensional quadratic equations not only simplifies the process, but also equips students with transferable skills essential for meeting complex mathematical and scientific challenges in various disciplines. This research presents the results of the work carried out with the students of the Automotive Mechanics degree at the Japan Higher Technological Institute. For this approach, two groups, one control and one experimental, were used in a quasi-experimental study.

As a result, an increase in the quality of learning is observed, as well as greater development in the ability to solve problems that lead to equations of this type.

The justification of this study lies in the search for alternatives that allow mathematics teachers to have the tools to teach this procedure at the Japan Higher Technological Institute. Thus, this article focuses on the insertion of another method for solving quadratic equations in three variables to obtain the equation in its canonical form.

Keywords: Linear algebra; Equation; Vector product.

Resumo

É importante que os estudantes das carreiras tecnológicas dominem os procedimentos de resolução de equações quadráticas de segundo grau com três variáveis utilizando produtos escalares e vetoriais, dada a complexidade associada ao método de ortogonalização de Schmidt. A compreensão profunda destes métodos alternativos não só reflete a inter-relação entre geometria e álgebra, mas também prepara os tecnólogos para resolver problemas tridimensionais de forma mais eficiente.

A aplicação de produtos escalares e vetoriais na resolução de equações quadráticas tridimensionais não apenas simplifica o processo, mas também equipa os alunos com habilidades transferíveis essenciais para enfrentar desafios matemáticos e científicos complexos em diversas disciplinas. Esta pesquisa apresenta os resultados do trabalho realizado com os alunos do curso de Mecânica Automotiva do Instituto Superior Tecnológico do Japão. Para esta abordagem, dois grupos, um controle e um experimental, foram utilizados em um estudo quase experimental.

Como resultado, observa-se um aumento na qualidade da aprendizagem, bem como um maior desenvolvimento na capacidade de resolução de problemas que levam a equações deste tipo.

A justificativa deste estudo está na busca de alternativas que permitam aos professores de matemática terem ferramentas para ensinar esse procedimento no Instituto Superior Tecnológico

do Japão. Assim, este artigo tem como foco a inserção de outro método de resolução de equações quadráticas em três variáveis para obtenção da equação em sua forma canônica.

Palavras-chave: Álgebra linear; Equação; Produto vetorial.

Introducción

La resolución de ecuaciones cuadráticas de tres variables representa un pilar matemático de relevancia incontestable en la comprensión y solución de fenómenos tridimensionales que impactan significativamente en diversas esferas de la vida cotidiana (Ruiz López, 2020). Este componente algebraico, no solo destaca en la investigación científica, sino que también desempeña un rol esencial en la ingeniería y la interpretación de fenómenos económicos complejos

Desde la perspectiva científica, la resolución de ecuaciones cuadráticas de tres variables provee una herramienta precisa para la modelización de sistemas físicos y naturales (Silva & Lazo, 2000) estas ecuaciones se revelan como fundamentales para describir fenómenos como la dinámica de fluidos, proporcionando una base matemática robusta para la investigación científica avanzada.

En el ámbito ingenieril, la resolución de ecuaciones cuadráticas tridimensionales es un aspecto crítico en el diseño eficiente de estructuras y procesos (Wolters, 2021), es de destacar que estas ecuaciones son esenciales en disciplinas como la mecánica estructural y la transferencia de calor, siendo la resolución de problemas tridimensionales imperativa para garantizar la viabilidad y el rendimiento de proyectos ingenieriles.

Desde la perspectiva económica, la aplicación de ecuaciones cuadráticas de tres variables se posiciona como una herramienta indispensable para modelar relaciones complejas entre variables económicas. (Lay, 2012) enfatizan que estas ecuaciones son cruciales en la formulación de modelos económicos tridimensionales, permitiendo así una comprensión profunda y la anticipación de fenómenos económicos complejos.

Este procedimiento no solo constituye un componente destacado en la investigación avanzada, sino que también despliega aplicaciones prácticas que inciden directamente en la resolución de desafíos en campos tan diversos como la ciencia, la ingeniería y la economía.

La resolución de ecuaciones cuadráticas de segundo grado con tres variables mediante el método de ortogonalización de Schmidt presenta un desafío intrincado para los estudiantes en el Instituto Superior Tecnológico Japón debido a la complejidad inherente de este enfoque. Este método, que busca ortogonalizar un conjunto de vectores, requiere un entendimiento profundo de los conceptos

matriciales y algebraicos asociados con sistemas tridimensionales (Ababu, 2020). Los estudiantes se enfrentan a la necesidad de manejar múltiples coeficientes y variables en un espacio tridimensional, lo que demanda un sólido dominio de las operaciones matriciales y una habilidad para visualizar y trabajar en un entorno tridimensional. La interpretación geométrica de las soluciones, así como la aplicación precisa del método de ortogonalización de Schmidt, añaden capas adicionales de complejidad (Fernando Galván, 2022).

Resolver ecuaciones cuadráticas de segundo grado con tres variables mediante el uso de productos vectoriales y escalares presenta ventajas significativas para los estudiantes. Este enfoque no solo permite una comprensión más profunda de las relaciones tridimensionales entre las variables, sino que también fomenta el desarrollo de habilidades geométricas y algebraicas avanzadas. Al utilizar productos vectoriales, los estudiantes pueden explorar la interacción entre vectores tridimensionales, proporcionando una interpretación geométrica valiosa de las soluciones. Asimismo, el uso de productos escalares facilita el cálculo (Antoniou, 2022).

Teniendo en cuenta esta problemática el objetivo de este trabajo es sugerir una alternativa didáctica mediante un procedimiento con su argumentación, donde se utiliza el producto vectorial y el producto escalar, el cual resulta más sencillo al estudiante cuando elimina los términos mixtos de la ecuación de segundo grado en tres variables.

Metodología

Diseño de la investigación

Se realiza una investigación de ámbito explicativo a través de un diseño cuasi-experimental que engloba un conjunto experimental y otro de control. La elección del enfoque explicativo en la investigación tiene como finalidad profundizar en la comprensión de la relación causal entre la ejecución del método de resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables, utilizando productos vectoriales y escalares, y las variaciones observadas en la motivación por el aprendizaje de la asignatura de matemáticas, en particular el álgebra lineal. Este alcance posibilita explorar más allá de las asociaciones correlativas y abordar la pregunta esencial de si la introducción de este procedimiento incide de manera efectiva en los resultados deseados.

El diseño cuasi-experimental, con grupos de experimentación y control, fue seleccionado para establecer comparaciones significativas entre aquellos estudiantes que aplican el método de

resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables a través del uso de productos vectoriales y escalares, y aquellos que siguen el procedimiento de ortogonalización de Schmidt.

El conjunto experimental recibió el método de resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables mediante el uso de productos vectoriales y escalares, mientras que el grupo de control recibió el procedimiento de ortogonalización de Schmidt.

Este diseño ofrece un marco adecuado y eficaz para evaluar la efectividad de la introducción del nuevo procedimiento al permitir la comparación entre dos condiciones distintas. Además, la recopilación de datos antes y después de la inserción contribuye a identificar cualquier cambio significativo en el aprendizaje de los estudiantes, proporcionando así evidencia sobre la relación causal entre la aplicación del nuevo procedimiento y los resultados académicos.

Participantes

Los participantes en este análisis consisten en un total de 40 estudiantes, distribuidos en dos conjuntos de 20 cada uno. Estos alumnos forman parte del programa de mecánica automotriz en el Instituto Superior Tecnológico Japón y están inscritos en el curso de álgebra lineal.

El grupo experimental, integrado por 20 estudiantes, fue expuesto al método de resolver ecuaciones de segundo grado con tres variables utilizando productos vectoriales y escalares, implementado dentro del marco del mencionado curso. En contraste, el grupo de control, también compuesto por 20 estudiantes, siguió el enfoque tradicional del procedimiento de ortogonalización de Schmidt.

La elección de estudiantes de la misma disciplina y matriculados en la misma asignatura establece un punto de partida homogéneo, facilitando la comparación entre los dos grupos. La distribución equitativa de los participantes en cada conjunto ayuda a minimizar posibles sesgos y a asegurar que cualquier disparidad en los resultados se pueda atribuir más directamente a la intervención que a otras variables externas.

Procedimiento

La investigación se llevó a cabo siguiendo el siguiente protocolo:

1. Recopilación de datos iniciales. Antes de la intervención, se obtuvieron datos de referencia sobre el desempeño de los estudiantes en ambos conjuntos mediante registros de participación.

2. Implementación del método de solución de ecuaciones de segundo grado con tres variables utilizando productos vectoriales y escalares. Durante la intervención, se registraron datos sobre la participación y rendimiento de los estudiantes al resolver problemas y ecuaciones mediante el nuevo método (grupo experimental) y el enfoque convencional (grupo de control).
3. Recopilación de datos posteriores. Después de la intervención, se examinaron los registros de participación para evaluar cambios en el rendimiento académico de los estudiantes. Además, se administró una encuesta electrónica anónima con el objetivo de conocer sus opiniones sobre la experiencia de resolver ejercicios con el nuevo método.
4. Análisis de datos. Se llevó a cabo un análisis descriptivo de los datos recopilados, incluyendo medidas de tendencia central y dispersión. Esto ofreció una visión general de la distribución de los datos y permitió identificar patrones y cambios a lo largo del tiempo. Se realizaron pruebas de normalidad para verificar la distribución de los datos, siendo esencial para determinar la adecuación de las pruebas estadísticas paramétricas, como el test t de Student, utilizado para comparar las diferencias entre los grupos experimental y de control. Este enfoque ayudó a identificar si existen diferencias estadísticamente significativas entre ambos grupos.
5. Comparación de resultados antes y después de la intervención. Se evaluó el impacto del nuevo procedimiento en el rendimiento de los estudiantes mediante la comparación de resultados antes y después de la intervención en ambos grupos.

Análisis de los resultados y discusión

Para analizar estadísticamente el impacto de la propuesta en el desempeño académico de los estudiantes de álgebra lineal, se llevó a cabo la verificación de la hipótesis.

- H_a : Existe una diferencia significativa en el dominio de la materia y la resolución de ecuaciones entre los estudiantes que aplican el método propuesto para resolver ecuaciones de segundo grado con tres variables utilizando productos vectoriales y escalares, en comparación con aquellos que siguen la metodología de ortogonalización de Schmidt.
- H_0 : No hay diferencia significativa en el dominio de la materia y la resolución de ecuaciones entre los estudiantes que aplican el método propuesto para resolver ecuaciones

de segundo grado con tres variables utilizando productos vectoriales y escalares, y aquellos que siguen la metodología de ortogonalización de Schmidt.

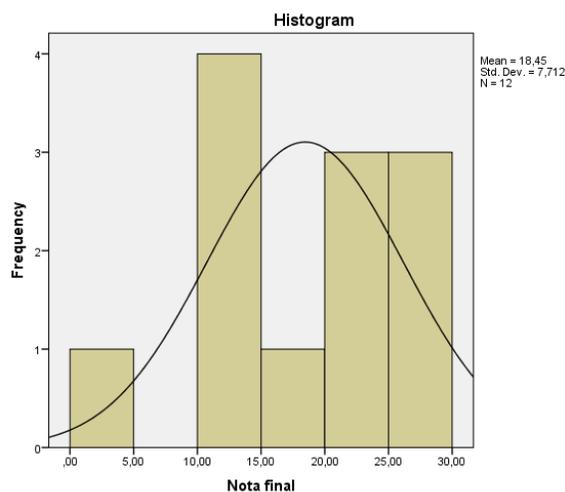
Para poner a prueba esta hipótesis, se lleva a cabo un test t-Student, que evalúa la disparidad entre los resultados obtenidos en las calificaciones finales para los grupos que siguieron el procedimiento de ortogonalización de Schmidt (grupo de control) y el procedimiento de resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables utilizando productos vectoriales y escalares (grupo experimental). Este test se aplicó después de verificar la normalidad de las variables (ver tabla 1). Además, se estableció un nivel de significancia estadística del 0.05, considerando como zona de rechazo cualquier probabilidad mayor a 0.05, lo que conlleva a aceptar H_0 y rechazar H_a .

Tabla 1: Test de normalidad de Kolmogorov-Smirnov

		Nota final
N		12
Normal Parameters ^{a,b}	Mean	18,4542
	Std. Deviation	7,71231
Most Extreme Differences	Absolute	,139
	Positive	,139
	Negative	-,105
Test Statistic		,139
Asymp. Sig. (2-tailed)		,200 ^{c,d}

- a. Test distribution is Normal.
- b. Calculated from data.
- c. Lilliefors Significance Correction.
- d. This is a lower bound of the true significance.

Gráfico 1: Histograma para la nota final de la asignatura



La información presentada en la tabla 2 resume los resultados derivados de la aplicación de la prueba t-Student para muestras independientes. De manera descriptiva, tras la intervención, se observa que la media de las calificaciones en el grupo que emplea la técnica de ortogonalización de Schmidt es de 17.77, con una desviación estándar de 5.31. Contrariamente, en el grupo que utiliza el método de resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables mediante el empleo de productos vectoriales y escalares, las calificaciones presentan medias de 25.74±4.21. En este contexto, se confirma la disparidad entre los grupos ($p=0.002<0.05$), indicando que las calificaciones finales de los estudiantes que siguieron la metodología del procedimiento de resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables utilizando productos vectoriales y escalares difieren significativamente de las obtenidas bajo la metodología del procedimiento de ortogonalización de Schmidt, respaldando así la hipótesis inicial.

Tabla 2: Test t-Student notas

Estrategias	$\bar{X} \pm D.E$	t	p
Procedimiento de ortogonalización de Schmidt	17.77±5.31	3.489	0.002
Productos vectoriales y escalar	25.74±4.21		

Por otra parte, al concluir la asignatura, se administró a los estudiantes una encuesta electrónica anónima con el fin de conocer sus percepciones sobre la metodología empleada en la resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables mediante el uso de productos vectoriales y escalares. Los resultados fueron los siguientes:

- La aplicación del método de resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables mediante el uso de productos vectoriales y escalares demandó que los estudiantes integraran contenidos de diversas ramas de las matemáticas, amalgamando todos los conocimientos de álgebra en la resolución de ecuaciones y problemas. En el periodo evaluado, las calificaciones de excelente, muy bueno y bueno representaron el 77,8%, 100,0% y 93,3%, respectivamente.
- La implementación del método de resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables utilizando productos vectoriales y escalares como enfoque para resolver ecuaciones en la enseñanza de la asignatura de álgebra lineal demostró ser eficaz, obteniendo resultados favorables con porcentajes superiores al 85,0%.

- En términos generales, los estudiantes evaluaron positivamente el uso del método de resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables mediante el uso de productos vectoriales y escalares, otorgándole calificaciones de "excelente y buena" con porcentajes superiores al 85%. Además, más del 95% de los alumnos expresaron que este método resultó ser "mucho mejor y mejor" en comparación con el enfoque tradicional. Los estudiantes demostraron su compromiso con el desarrollo de sus habilidades de resolución de ecuaciones y problemas al abordar repetidamente los ejercicios de álgebra lineal hasta lograr su solución.
- El método de resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables mediante el uso de productos vectoriales y escalares como enfoque tuvo un impacto significativo en el aprendizaje de los estudiantes, ya que más del 90% evaluó su aprendizaje como "muy alto y alto". Además, en un porcentaje superior al 90%, indicaron que su aprendizaje fue "mucho mejor y mejor" en comparación con el método de ortogonalización de Schmidt. La nueva propuesta les brinda la oportunidad de resolver ecuaciones de forma más asequible, sin necesidad de tantos cálculos.
- Prácticamente la totalidad de los estudiantes, alcanzando el 100,0%, se sintieron estimulados para adentrarse en el aprendizaje del álgebra lineal y expresaron plena satisfacción con el método de resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables mediante el uso de productos vectoriales y escalares.

Conclusiones

Al analizar la información recopilada durante este proyecto, se pueden extraer varias conclusiones fundamentales: según los resultados obtenidos al implementar actividades en el aula utilizando el método de resolución de ecuaciones de segundo grado con tres variables mediante el uso de productos vectoriales y escalares, se determina que se logró mejorar la habilidad y el interés por el álgebra entre los estudiantes.

Además, se observó el desarrollo de una motivación intrínseca que los llevó a participar activamente en la práctica, estudio y ejecución de las actividades y tareas programadas, con el objetivo de adquirir un mayor nivel de conocimiento. La aplicación de este método desempeñó un papel crucial en estimular la motivación de los estudiantes para llevar a cabo actividades

independientes, siendo esenciales para su cumplimiento. Se destaca que la utilización del método antes mencionado, no solo impactó positivamente en la motivación de los estudiantes para abordar tareas autónomas, sino que también contribuyó significativamente a mejorar sus calificaciones y, por ende, su rendimiento académico en la asignatura de álgebra lineal, la cual forma parte del programa de la carrera de mecánica automotriz.

Referencias

1. Ababu, T. (2020). A simplified expression for the solution of cubic polynomial equations using function evaluation. *MathGm*, 1-10.
2. Antoniou, S. M. (2022). *Solving Polynomial Equations of Third, Fourth and Fifth Degree*. Corinth, Greece: BSc Mathematics.
3. Fernando Galván, J. F. (2022). *Curvas algebraicas*. Editorial Sanz y Torres, S.L.
4. Lay, D. (2012). *Álgebra lineal y sus Aplicaciones* (4ta. ed). Mexico: Pearson Educación.
5. Ruiz López, G. (2020). *Álgebra para ingenieros*. Madrid: García Maroto Editores.
6. Silva, J., & Lazo, A. (2000). *Fundamentos de Matemáticas*. Noruega: Limusa Editores.
7. Wolters, D. J. (2021). Practical algorithm for solving the cubic equation. *Numerical Récipes*, 1-16.