



*Influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en
estudiantes universitarios*

Influence of geogebra software on the learning of geometry in university students

*Influência do software geogebra na aprendizagem de geometria em estudantes
universitários*

Maritza Elizabeth Castro-Mayorga ^I
me.castro@uta.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0001-7105-2279>

Gilda Tatiana Guerrero-Bonilla ^{II}
gilga.guerrero@educacion.gob.ec
<https://orcid.org/0009-0007-4298-377X>

Angélica Cristina Sánchez-Rosero ^{III}
angelica.sanchezr@educacion.gob.ec
<https://orcid.org/0000-0003-3575-3195>

María Belén Carrasco-Suárez ^{IV}
mariab.carrasco@educacion.gob.ec
<https://orcid.org/0009-0005-7545-1011>

Correspondencia: me.castro@uta.edu.ec

Ciencias Matemáticas y Ciencias de la Computación
Artículo de Investigación

* **Recibido:** 23 de julio de 2023 * **Aceptado:** 27 de agosto de 2023 * **Publicado:** 01 de septiembre de 2023

- I. Magister, Ingeniera, Universidad Técnica de Ambato, Ecuador.
- II. Magister, Licenciada Universidad Técnica de Ambato, Ecuador.
- III. Magister, Ingeniera, Universidad Técnica de Ambato, Ecuador.
- IV. Licenciada, Universidad Técnica de Ambato, Ecuador

Resumen

El presente trabajo plantea una reflexión acerca de los recursos para el cálculo visual de integrales, sobre la base de una revisión bibliográfica de las publicaciones efectuadas sobre esta temática. La importancia de desarrollar la habilidad de calcular integrales se torna fundamental en diversas carreras de la educación universitaria, sin embargo, generalmente, existen ciertas dificultades para la comprensión de conceptos y resolución de ejercicios relativos a este tema. Al respecto, los diversos autores consultados indican que la visualización es uno de los mejores recursos que tiene al alcance el docente de matemáticas para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de integrales. El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) se presentan como una alternativa que contribuye a la visualización de conceptos matemáticos. Software como el GeoGebra, Scilab, los Sistemas Algebraicos de Cómputo (SAC), entre otros, como herramientas TICs pueden emplearse para la enseñanza del cálculo de integrales, pues contienen visualización gráfica, graficas en 2D y 3D, líneas de nivel, curvas paramétricas, animaciones, entre otras, que brindan un abanico de posibilidades con buenos resultados para facilitar la comprensión y resolver problemas planteados sobre integrales de diferentes formas.

Palabras Clave: Integral; Visualización; TIC; Aprendizaje.

Abstract

The present work proposes a reflection about the resources for the visual calculation of integrals, based on a bibliographic review of the publications carried out on this subject. The importance of developing the ability to calculate integrals becomes fundamental in various careers of university education, however, generally, there are certain difficulties in understanding concepts and solving exercises related to this topic. In this regard, the various authors consulted indicate that visualization is one of the best resources available to the mathematics teacher to facilitate the teaching and learning of integrals. The use of Information and Communication Technologies (ICT) are presented as an alternative that contributes to the visualization of mathematical concepts. Software such as GeoGebra, Scilab, Computer Algebraic Systems (SAC), among others, as ICT tools can be used to teach the calculation of integrals, since they contain graphic visualization, 2D and 3D graphs, level lines, parametric curves, animations, among others, that provide a range of

possibilities with good results to facilitate understanding and solve problems posed on integrals of different forms.

Keywords: Comprehensive; Visualization; TIC; Learning.

Resumo

O presente trabalho propõe uma reflexão sobre os recursos para o cálculo visual de integrais, a partir de uma revisão bibliográfica das publicações realizadas sobre este assunto. A importância de desenvolver a capacidade de calcular integrais torna-se fundamental em diversas carreiras do ensino universitário, porém, geralmente, existem certas dificuldades na compreensão de conceitos e na resolução de exercícios relacionados a este tema. Nesse sentido, os diversos autores consultados indicam que a visualização é um dos melhores recursos à disposição do professor de matemática para facilitar o ensino e a aprendizagem de integrais. O uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) apresenta-se como uma alternativa que contribui para a visualização de conceitos matemáticos. Softwares como GeoGebra, Scilab, Computer Algebraic Systems (SAC), entre outros, como ferramentas TIC podem ser utilizados para ensinar o cálculo de integrais, pois contêm visualização gráfica, gráficos 2D e 3D, linhas de nível, curvas paramétricas, animações, entre outros, que oferecem um leque de possibilidades com bons resultados para facilitar a compreensão e a resolução de problemas colocados em integrais de diferentes formas.

Palavras-chave: Abrangente; Visualização; TIC; Aprendizado.

Introducción

El proceso de enseñanza y aprendizaje de temas matemáticos como la resolución de integrales en la educación superior, demanda por parte del docente el uso de recursos didácticos que fomenten el interés del educando, para la superación de las posibles dificultades, obstáculos y errores que pueden presentarse en el camino de la integración.

La preparación de los estudiantes para aplicar los conocimientos matemáticos a la solución de los problemas como el cálculo de integrales, subraya la pertinencia de valerse de recursos novedosos que faciliten la comprensión de los conceptos y el desarrollo de las habilidades matemáticas específicas de este tema (Sánchez, Pérez, & Remedios, 2023). De este modo, la influencia de la tecnología en la educación es algo notorio en la actualidad. La implementación de técnicas de

enseñanza con ayuda de herramientas informáticas es algo comúnmente usado para facilitar la enseñanza de integrales, métodos numéricos, procedimientos matemáticos (Arévalo & González, 2021).

Para potenciar una sensibilización tendente a movilizar el aprendizaje del cálculo de integrales, en la actualidad, se alude especialmente, a los beneficios que traen consigo las nuevas tecnologías, a través de las cuales se pueden presentar los conceptos de forma más visual e interactiva. En este particular, (Martínez, 2014) manifiesta, “es claro que la visualización de conceptos y resultados es uno de los mejores recursos didácticos que tenemos los profesores de matemáticas para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de una materia” (p.154).

Durante el periodo formativo, los docentes de matemática de educación superior, dada la complejidad que por lo general, suponen las temáticas que desarrollan para los estudiantes, tal es el caso del cálculo de integrales, se enfrentan al reto de buscar recursos didácticos que fomenten el interés y la comprensión del educando, en este cometido las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) a través de la aplicación de un conjunto de recursos, herramientas, equipos, programas informáticos, aplicaciones, redes y medios; permiten el acceso, producción, tratamiento y comunicación de información presentada en diferentes códigos (texto, imagen, sonido,...) (Belloch Ortí, s/f). La introducción de las TIC como una herramienta dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas facilita que los estudiantes busquen información, interactúen con los conceptos y los manipulen de un modo directo y generen nuevos conocimientos (Fernández & Álvarez, 2022).

Las TIC al servicio de la educación y más concretamente en el campo de la enseñanza de las integrales, puede coadyuvar a la comprensión de esta temática por parte del estudiante mediante el uso de la imagen como recurso didáctico, (Martínez, 2014) converge en esta idea cuando destaca “si queremos lograr que nuestros alumnos aprendan matemáticas, es muy recomendable, siempre que sea posible, fomentar la visualización” (p.154). De ahí, considera el citado autor, existen algunos métodos de integración basados en la visualización que ofrecen una motivación muy superior a la que se logra con una fórmula abstracta, en lo que se refiere al cálculo integral (Martínez, 2014).

En atención a lo antes mencionado, este ensayo científico plantea una reflexión acerca de los recursos para el cálculo visual de integrales, sobre la base de una revisión bibliográfica de las publicaciones efectuadas sobre esta temática.

Desarrollo

La historia del concepto de integral comenzó hace más de veinte siglos, en un intento de dar respuesta a los diferentes problemas geométricos que fueron surgiendo. Con el paso de los siglos, nuevos problemas relativos a fenómenos naturales (gravedad, movimiento, etc.) propiciaron avances en la evolución del concepto, que finalmente desembocaron en el cálculo integral como lo conocemos hoy en día (Fernández Fernández, 2010).

La visualización de conceptos matemáticos

Los tópicos relativos al concepto o cálculos propiamente dichos sobre integrales, se conciben dificultosos, tal como argumentan (Salgado et al, 2020) el Cálculo Diferencial e Integral ha sido tradicionalmente de difícil comprensión por los estudiantes, no obstante, su debida comprensión puede favorecerse a través de imágenes visuales, al respecto, (Depool, 2005) indica que la visualización se muestra como una parte esencial en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas (p.66). El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación se presentan como una alternativa que contribuye a la visualización de conceptos matemáticos (Depool, 2005, pág. 68).

El trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos ha tenido como principal fuente de inspiración a la visualización, y ésta ha jugado un papel relevante en el desarrollo de las ideas y conceptos del cálculo infinitesimal (Lois & Milevicich, 2008). La visualización basada en el ordenador, ya sea estática, dinámica o interactiva, es sólo una faceta del papel del ordenador en las Matemáticas. La visualización debe estar ligada a los aspectos numéricos y simbólicos de las Matemáticas para lograr los mejores resultados (Depool, 2005, pág. 68).

En la misma línea (Martínez, 2014) denota “la visualización matemática de un problema desempeña un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema” (p.154).

En este mismo orden, (Lois & Milevicich, 2008) han destacado que visualizar, en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la universidad, tiene que ver con la capacidad de crear imágenes ricas que el individuo puede manipular mentalmente, puede transitar por diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, proporcionar en papel o pantalla de computadora la idea matemática que está en juego. Adicionalmente, estos autores señalan que las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales,

representables intuitiva o geoméricamente y cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas de campo (Lois & Milevicich, 2008).

Aprendizaje del Cálculo Integral

Es conveniente destacar, que el aprendizaje del cálculo integral, se entiende según (Fonseca Castro & Alfaro Carvajal, 2018) como el “proceso matemático a través del cual se aplican procedimientos algorítmicos de integración o antiderivadas para la solución de problemas” (p.11). Por otra parte, (Depool, 2005) define el aprendizaje del cálculo integral como “Aprendizaje de algoritmos y demostraciones rigurosas del formalismo matemático donde prima la solución de problemas rutinarios” (p.46). Por su lado, (González Tinoco, 2022) el aprendizaje del cálculo integral es el proceso a través del cual el estudiante es capaz de comprender las técnicas y métodos de integración para desarrollar y modelar problemas de aplicación (p.45).

Asimismo, aprender los contenidos del cálculo de integrales definidas significa comprender el significado de los conceptos, dominar los procedimientos y desarrollar las habilidades propias del cálculo (Granera Rugama, 2019). Además este autor prioriza la utilización de métodos de enseñanza que propicien el desarrollo del pensamiento matemático avanzado y el uso de las tecnologías (Granera Rugama, 2019).

Las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Los medios de aprendizaje apoyados en el uso de software específico, hipertextos y equipos multimedia enriquecen el proceso de exploración, elaboración de algoritmos, formación de habilidades lógicas (Lois & Milevicich, 2008). El proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas requiere de la introducción de métodos novedosos como pueden ser los asistentes matemáticos, que desarrollan el aprendizaje a partir de potenciar el rol del estudiante como sujeto central, convirtiéndolo en constructor del conocimiento (Salgado et al, 2020).

El uso del ordenador en el aula, como recurso didáctico facilitador de los procesos de enseñanza aprendizaje, puede ser un medio para coordinar los distintos registros de representación de un concepto, si bien consideramos que la mayor contribución de las nuevas tecnologías a la mejora del aprendizaje se centra en la creación de medios personalizados que mejor se adapten a los requerimientos pedagógicos de la propuesta (Lois & Milevicich, 2008)

Recursos didácticos tecnológicos para el cálculo visual de integrales

Existen diferentes recursos didácticos que bien pueden ser aprovechados para el cálculo visual de integrales, en tal sentido, (Fernández Fernández, 2010) específica, para una comprensión más profunda del concepto de integral el GeoGebra se configura como recurso visual y dinámico para facilitar la comprensión y relación entre las distintas representaciones, puesto que permite representar funciones y áreas bajo la curva fácilmente, construir figuras diversas y mostrar de forma intuitiva los procesos de paso al límite aplicados al cálculo de áreas (p.2).

En concordancia con la mencionada autora (Salgado et al, 2020) también indica que uno de los más útiles asistentes matemáticos, el GeoGebra, es un Programa Dinámico para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas que combina elementos de Aritmética, Geometría, Álgebra, Análisis, Cálculo, Probabilidad y Estadística. Es un software libre de matemática (bajo licencia GNU) que integra geometría, álgebra y cálculo.

Por otro lado, (Sánchez, 2016) esboza, el GeoGebra es un sistema de geometría dinámica que consta de una ventana algebraica y una geométrica las que permiten establecer esta correspondencia para cada objeto. Permite realizar construcciones con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas y funciones que se pueden modificar dinámicamente, así como operar con las funciones, por ejemplo, calcular derivadas e integrales de diferentes funciones. Adicionalmente, el mismo autor argumenta que el GeoGebra, permite también comprobar el uso correcto de los métodos y fórmulas de derivación e Integración, ejemplo: en el cálculo de la Integral indefinida de cierta función el estudiante puede visualizar la familia de curvas resultantes de esta operación o el valor del área bajo la curva en el caso de la integral definida sobre un intervalo de la recta real, así como graficar las funciones en cuestión con la opción que brinda para este fin (Sánchez , 2016).

El software Scilab, a decir de (Medina, 2013) es una herramienta que tiene el docente de matemáticas a disposición para la enseñanza y aprendizaje de la temática relacionada con el Cálculo Integral. Cuenta con numerosas ventajas como el hecho de que es un software libre, distribuido con su código fuente. Scilab posee un intérprete, objetos y funciones adaptadas al cálculo numérico y a la visualización de datos. Contiene también numerosos útiles de visualización gráfica, gráficas en 2D y 3D, líneas de nivel, curvas paramétricas, animaciones, etc. (Medina, 2013).

La elección del software libre Scilab permite la descarga “online” desde cualquier computadora.

Los comandos del sistema son introducidos paulatinamente, de manera que el software se puede usar como una calculadora inteligente (Medina, 2013). Los resultados obtenidos muestran que los alumnos fueron capaces de resolver el problema planteado de la integral de diferentes formas, en un desempeño flexible. El trabajo con el software Scilab, en este caso, brinda un abanico de posibilidades metodológicas que en general no están cubiertas por los cursos regulares, pero los alumnos pueden descubrir a través de la utilización de la investigación del software armando un verdadero laboratorio de experimentación (Medina, 2013).

Igualmente, los Sistemas Algebraicos de Cómputo (SAC) como herramientas TICs que permiten ejecutar operaciones entre expresiones matemáticas en una forma similar a las operaciones manuales tradicionales de matemáticos o científicos, manipular expresiones algebraicas y representar gráficamente funciones (Ruiz & Ciancio, 2018), pueden emplearse para la enseñanza del cálculo de integrales indefinidas.

Es recomendable que se resuelvan las actividades, en primer instancia, utilizando lápiz y papel, empleando los conocimientos previos ya adquiridos oportunamente de análisis diferencial e integral para funciones reales de variable real (puedes consultar, si lo requieres, apuntes de clase y/o material bibliográfico de referencia de la cátedra); luego utilizando Sistema Algebraico de Cálculo (SAC) (Ruiz & Ciancio, 2018). En la selección de las actividades, en el material didáctico, se tiene en cuenta que se presenten bajo planteos simples y sencillos, que puedan resolver los alumnos con la guía y el apoyo del docente, en donde le sea útil aplicar los conocimientos previos correspondientes al cálculo diferencial e integral, como así también SAC apropiados; y tiendan a contribuir en la formación disciplinar del alumno (Ruiz & Ciancio, 2018).

Sin embargo, (Ponce & Rivera, 2011) afirman lo siguiente: “existen casos donde los resultados del SAC difieren a los obtenidos con lápiz y papel usando la teoría, lo cual puede influir de diversas maneras. Lo idóneo es analizar el porqué de esta diferencia” (p. 125).

Las experiencias de los autores (Asmuss & Budkina, 2019) en el uso de técnicas de visualización y simulación en la enseñanza del análisis matemático mediante herramientas específicas como GeoGebra, MVT, JMT, RStudio demuestran la eficacia y utilidad de estas herramientas para el cumplimiento de distintos objetivos de estudio como explicación e ilustración de resultados teóricos, análisis de sistemas del mundo real e investigación en los campos correspondientes de las matemáticas.

Conclusiones

Los conceptos matemáticos relativos al cálculo y resolución de problemas sobre integrales, se presentan, generalmente con cierto grado de dificultad por parte de los estudiantes de educación superior, de ahí, existen diferentes modelos y/o recursos que los docentes pueden emplear en las actividades áulicas para conducir a los educandos a aprendizaje significativo de esta temática.

El desarrollo que han venido experimentando en los últimos tiempos las tecnologías de Información y Comunicación (TIC) y bien usadas como una metodología didáctica de trabajo en aula, son un inestimable apoyo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente todo lo referente al tema de la integración a través de la visualización de imágenes.

Dentro de los recursos didácticos para el cálculo visual de integrales, uno de los más útiles asistentes matemáticos, el GeoGebra, que es un programa dinámico para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas que combina elementos de aritmética, geometría, álgebra, análisis, cálculo, probabilidad y estadística. También destaca el software Scilab, el cual contiene también numerosos útiles de visualización gráfica, gráficas en 2D y 3D, líneas de nivel, curvas paramétricas, animaciones, etc. para la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral.

Igualmente, los Sistemas Algebraicos de Cómputo (SAC) como herramientas TICs que permiten ejecutar operaciones entre expresiones matemáticas en una forma similar a las operaciones manuales tradicionales de matemáticos o científicos, manipular expresiones algebraicas y representar gráficamente funciones que pueden emplearse para la enseñanza del cálculo de integrales indefinidas.

Referencias

- Arévalo, B., & González, A. (2021). Enseñanza de Integrales Mediante Métodos Numéricos Por Medio del Uso de las TIC. Sinergias educativas; vol. 5, núm. 4, <http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/382/3821724002/index.html>.
- Asmuss, S., & Budkina, N. (2019). On usage of visualization tools in teaching mathematics at universities. Engineering for Rural Development, 18. <https://doi.org/10.22616/ERDev2019.18.N515>, pp.1962–1969.

- Belloch Ortí, C. (s/f). Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC). Universidad de Valencia. España. <https://www.uv.es/~bellochc/pdf/pwtic1.pdf>, pp.1-7.
- Depool, R. (2005). La Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo Integral en un Entorno Computacional: Actitudes de los Estudiantes Hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS). Universidad de La Laguna. Tesis Doctoral. <https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/21023>, pp.714.
- Fernández Fernández, L. (2010). La Historia como herramienta didáctica: el concepto de integral. Universidad de Cantabria (UniCan). Trabajo de Fin de Máster. <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1642/Laura%20Fern%C3%A1ndez%20Fern%C3%A1ndez.pdf?sequence=1>, pp.40.
- Fernández, M., & Álvarez, I. (2022). Las TIC para enseñar ¿también en Matemáticas? Cuaderno de Pedagogía Universitaria, 19 (38), <http://cuaderno.pucmm.edu.do>, pp.109-119.
- Fonseca Castro, J., & Alfaro Carvajal, C. (2018). El cálculo diferencial e integral en una variable en la formación inicial de docentes de matemática en Costa Rica. Educación. <https://doi.org/https://doi.org/10.15517/revedu.v42i2.25844>.
- González Tinoco, N. (2022). Análisis Correlacional para Medir el Impacto de la Aplicación de las Tic en el Aprendizaje del Cálculo Integral de los estudiantes del nivel tecnológico de la Institución Universitaria ITSA. Institución Universitaria ITSA. Barranquilla, Atlántico. Colombia. Trabajo de Grado de Maestría. https://repositorio.unicartagena.edu.co/bitstream/handle/11227/16338/TGF_Noemy%20Gonzalez.pdf?sequence=1, pp.116.
- Granera Rugama, J. (2019). La integral definida como el área bajo una curva en un entorno computacional. Revista Científica de FAREM-Estelí, 8(30). <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7304343.pdf>.

- Lois, A., & Milevicich, L. (2008). La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral desde la perspectiva del nuevo paradigma de la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana de Educación*; 47(5). DOI:10.35362/rie4752272.
- Martínez, F. (2014). Recursos para el cálculo visual de integrales. *Educación Matemática*, vol. 26, núm. 1, <https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v26n1/v26n1a7.pdf>, pp.153-169.
- Medina, M. (2013). Uso de software libre para el aprendizaje de la integral definida. I CEMACC (I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe). República Dominicana. <https://ciaem-iacme.org/memorias-icemacyc/100-441-1-DR-C.pdf>, pp.11.
- Ponce, J., & Rivera, A. (2011). Un análisis del uso de la tecnología para el cálculo de primitivas. *Números*, 77, <http://www.sinewton.org/numeros>, pp.85-98.
- Ruiz, S., & Ciancio, M. (2018). Empleo de las TICs Para la Enseñanza del Cálculo de Integrales Definidas. <http://funes.uniandes.edu.co/19827/1/Ruiz2018Empleo.pdf>, pp.822-829.
- Salgado, A., Ibáñez, M., Rigual, S., Ramírez, R., Padrón, G., & López, E. (2020). Estrategia metodológica para el Cálculo Diferencial e Integral en la carrera “Sistemas de Información en Salud”. *RCIM: Revista Cubana de Informática Médica*; Vol.12, No.1 Ciudad de la Habana, Cuba. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1684-18592020000100108.
- Sánchez, D. (2016). Metodología didáctica para la enseñanza activa en el proceso de graficar funciones. Universidad Técnica de Machala. <http://www.repositorio.utmachala.edu.ec/handle/48000/9711>.
- Sánchez, W., Pérez, A., & Remedios, J. (2023). Estrategia didáctica para desarrollar la habilidad calcular integrales definidas desde un aprendizaje creativo. *Mendive. Revista de Educación*; Vol.21, No.1. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815-76962023000100005.