Polo del Conocimiento
Pol. Con. (Edición núm. 85) Vol. 8, No 8
Agosto 2023, pp. 2617-2630
ISSN: 2550 - 682X
DOI: 10.23857/pc.v8i8.5995

Renormalización perturbativa para correcciones radiactivas en teoría cuántica de campos

Perturbative renormalization for radioactive corrections in quantum field theory

Renormalização perturbativa para correções radioativas na teoria quântica de campos

Diego Sebastián Santana Alarcón [I]
diego.santana@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-0072-4888

Julio Cesar Andrade Landeta [II]
julio.andrade@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-0176-1373

Germán Ulises Moreno Arias [III]
ulises.moreno@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-9616-6616

Monserrath Amparo Padilla Muñoz [IV]
monserrath.padilla@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0009-0006-2633-3438

Correspondencia: diego.santana@espoch.edu.ec

Ciencias Matemáticas
Artículo de Investigación

*** Recibido:** 30 de mayo de 2023 ***Aceptado:** 29 de julio de 2023 *** Publicado:** 27 de agosto de 2023

I. Máster, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
II. Máster, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
III. Máster, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
IV. Máster, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.

Resumen

En Teoría Cuántica de Campos con interacciones siempre aparecen cantidades divergentes cuando se calculan amplitudes físicas. Estas cantidades deben ser expresadas mediante magnitudes medibles, y para este cometido se necesita un mecanismo de renormalización que elimine estas divergencias. Una consecuencia de la renormalización es que las constantes de acoplamiento renormalizadas dependen de la escala de energía. Esta dependencia se puede caracterizar mediante las funciones beta. El entendimiento de su estructura nos permite conocer el comportamiento infrarrojo y ultravioleta de la teoría, así como indicar su régimen perturbativo. En este trabajo se presenta el computo de la función beta a orden de 1-bucle de la Electrodinámica Cuántica (QED) y en Teorías Gauge no Abelianas con grupo SU(N), se discute el caso especial de SU(3). Se utiliza renormalización perturbativa para aislar divergencias en contratérminos y para renormalizar los parámetros de la teoría. Se utiliza el método de regularización dimensional para regularizar integrales infinitas y garantizar su convergencia. Se encuentra que, para el caso de QED la función beta es positiva, siendo segura en regímenes infrarrojos. En teorías Gauge no Abelianas, la función beta es negativa para nF < 16, y presenta el fenómeno de libertad asintótica.

Palabras Clave: Función beta; No abelianas; Teorías gauge; Renormalización; qed; qcd; su(n).

Abstract

In Quantum Field Theory with interactions, divergent quantities always appear when physical amplitudes are calculated. These quantities must be expressed by means of measurable magnitudes, and for this purpose a renormalization mechanism is needed to eliminate these divergences. A consequence of the renormalization is that the renormalized coupling constants are dependent on the energy scale. This dependency can be characterized by the beta functions. The understanding of its structure allows us to know the infrared and ultraviolet behavior of the theory, as well as to indicate its perturbative regime. In this work the computation of the beta function to order of 1-loop of Quantum Electrodynamics (QED) is presented and in Non-Abelian Gauge Theories with SU(N) group, the special case of SU(3) is discussed. Perturbative renormalization is used to isolate divergences in counterterms and to renormalize the parameters of the theory. The dimensional regularization method is used to regularize infinite integrals and guarantee their convergence. It is found that, in the case of QED, the beta function is positive, being safe in infrared regimes. In non-

Abelian Gauge theories, the beta function is negative for nF < 16, and presents the phenomenon of asymptotic freedom.

Keywords: Função beta; Não abeliano; Teorias de medição; Renormalização; qed; qcd; dele(n).

Resumo

Na Teoria Quântica de Campos com interações, quantidades divergentes sempre aparecem quando amplitudes físicas são calculadas. Estas quantidades devem ser expressas por meio de grandezas mensuráveis, e para isso é necessário um mecanismo de renormalização para eliminar essas divergências. Uma consequência da renormalização é que as constantes de acoplamento renormalizadas dependem da escala de energia. Esta dependência pode ser caracterizada pelas funções beta. A compreensão de sua estrutura permite conhecer o comportamento infravermelho e ultravioleta da teoria, bem como indicar seu regime perturbativo. Neste trabalho é apresentado o cálculo da função beta de ordem 1-loop da Eletrodinâmica Quântica (QED) e nas Teorias de Gauge Não-Abelianas com grupo SU(N), o caso especial de SU(3) é discutido. A renormalização perturbativa é usada para isolar divergências em contratermos e para renormalizar os parâmetros da teoria. O método de regularização dimensional é utilizado para regularizar integrais infinitas e garantir sua convergência. Verifica-se que, no caso do QED, a função beta é positiva, sendo segura em regimes de infravermelho. Nas teorias de Gauge não-Abelianas, a função beta é negativa para nF < 16 e apresenta o fenômeno da liberdade assintótica.

Palavras-chave: Função beta; Não abeliano; Teorias de medição; Renormalização; qed; qcd; dele(n).

Introducción

La electrodinámica cuántica (QED) es la teoría de campos que describe las interacciones de partículas cargadas eléctricamente representadas por campos fermiónicos (e.g. electrones, muones, protones, quarks, etc.) (Schweber, 1994); formalmente hablando, es la teoría de campos para fermiones con simetría gauge (o simetría local) U(1). Este tipo de teorías están basadas en un grupo de Lie conmutativo y se les conoce como Teorías Gauge Abelianas (Salam y Ward, 1959), (Glashow,1961) y (Weinberg, 1967). Éstas no constituyen modelos suficientes para obtener una descripción completa de la naturaleza. Un ejemplo de ello es que la fuerza nuclear fuerte, responsable de la cohesión de núcleos atómicos y la fuerza nuclear débil que es aquella involucrada en las desintegraciones nucleares, no son descritas por teorías gauge Abelianas. Pese a que las interacciones fuerte y débil también pueden ser descritas mediante simetrías locales, sus grupos de simetría asociados son grupos no conmutativos o No Abelianos, he aquí que nace la necesidad de construir y estudiar Teorías Gauge No Abelianas para la descripción correcta de estas interacciones . (Ramond, 2011). Las teorías no Abelianas son la base fundamental para la construcción del modelo estándar (Yang y Mills, 1954) y son de un interés científico alto y de un campo muy activo en la investigación actual (Jaffe y Witten, 2000).

Teorías Gauge y en general toda Teoría Cuántica de Campos (QFT) encuentra su mayor dificultad en lidiar con los infinitos que aparecen al momento de calcular cantidades medibles, e.g. amplitudes de probabilidad, tasas de decaimientos, etc. En un principio, la existencia de estas divergencias llevó a pensar que QFT podría ser un marco erróneo para describir la naturaleza en su escala fundamental. Sin embargo, más tarde, (Tomonaga, 1946), (Feynman, 1948), propusieron un programa de renormalización que proporcionaba resultados finitos y físicamente sensibles. Así se logran completar cálculos en QED que concuerdan con las observaciones con una precisión de hasta ocho cifras significativas, los más precisos en toda la historia de la ciencia (Odom, Hanneke, D`Urso y Gabrielse, 2006). De acuerdo con la visión actual (Wilson, 1975), la renormalización no es más que la parametrización de la sensibilidad de la física de bajas energías a la física de altas energías. Es decir, podemos ver a las teorías renormalizables como teorías de campo efectivas que describen la física sólo a bajas energías (ya que su descripción a altas energías falla). En este sentido, el Modelo Estándar de Partículas es en realidad una teoría de campo efectiva que describe a la naturaleza (aproximadamente) a través de teorías solamente renormalizables . (Wilson, 1975), (T´Hooft y Veltman, 1972) y (Peskin y Schroeder, 1995).

Una consecuencia de la renormalización es que las constantes de acoplamiento efectivas de una teoría (una vez renormalizadas) dependen de la escala de energía M con la que se esté trabajando, es decir, las constantes a nivel cuántico tal como las conocemos no son en realidad constantes (Politzer, 1973), (Gross y Wilczek, 1973) y ('T Hooft, 1999). Por ejemplo, la constante de estructura fina de la QED tiene una dependencia logarítmica con M. Esta dependencia de la escala de energía se puede caracterizar mediante las funciones beta definidas como:

$$\beta(g) = \frac{\partial g_M}{\partial \ln(M)} \quad (1)$$

con g la constante de acoplamiento y gM la constante de acoplamiento renormalizada. En otras palabras, y para enfatizar su importancia, para entender el comportamiento infrarrojo de una teoría cuántica de campos (cuando el momento, k→ 0) y ultravioleta (cuando k→ ∞) es crucial saber la estructura de las funciones beta asociada a la constante de acoplamiento de la teoría (Gaumé y Vázquez-Mozo, 2011), (Frampton, 2008) y (Cheng y Li, 1988). Además de indicarnos el régimen perturbativo de la teoría (cuando g(M) <1), las funciones beta nos permiten analizar fenómenos como la libertad asintótica (aparente libertad de quarks dentro de hadrones). Actualmente, el campo de investigación que realiza cálculo de funciones beta en QFT continua activo y su estudio se ha ampliado desde inicios de la década de los 90s ('T Hooft, 1999). Estudios recientes muestran cálculos en 4to (Czakon, 2005), y hasta en 5to orden de aproximación, utilizando métodos avanzados en QFT como Back Ground Field Method y mediante cálculos numéricos por computadora (Luthe, Maier y Marquard, 2017), (Baikov, Chetyrkin y Kuhn, 2017).

Este trabajo se plantea como una primera aproximación a la investigación seria que se hace hoy en día. Es así que se calcula las funciones beta de una teoría gauge con grupo SU(N), utilizando el mecanismo de renormalización y la técnica de regularización dimensional. Además analizaremos el comportamiento en altas y bajas energías de esta teoría y discutiremos sus implicaciones en el caso particular de SU(3). (SU(3) es de especial importancia porque corresponde al grupo gauge de la Cromo Dinámica Cuántica (QCD)).

Métodos

La metodología utilizada en esta sección es la renormalización perturbativa, también llamado esquema de renormalización BPH (Bogoliubov, Parasiuk y Hepp . Grossomodo) (Bogolyubov y Parasiuk, 1957), (Hepp, 1966) y (Zimmermann, 1970), consiste en dividir el Lagrangiano en una parte física (renormalizada), que contiene los campos que medimos experimentalmente, y en otra parte que contiene contratérminos que son inobservables [25]. Algunas de estas contribuciones en la teoría no Abeliana se aprecian en los diagramas de Feynman mostradas en las Figuras 1,2,3. Cabe recalcar que al igual que en QED, en teorías no Abelianas también aparecen divergencias y es necesario renormalizarlas (Feynman, 1949), que es uno de los objetivos de este trabajo.

Pol. Con. (Edición núm. 85) Vol. 8, No 8, Agosto 2023, pp. 2617-2630, ISSN: 2550 - 682X

Figura 1: Contribuciones al propagador bosónico a orden g2. Estos diagramas poseen divergencias que son canceladas por el contratérmino δ3 (Weinberg, 1995).

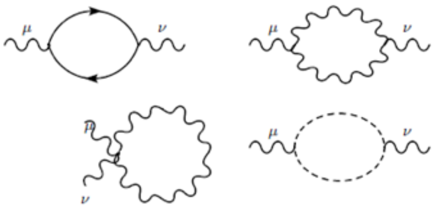


Figura 2: Corrección al propagador fermiónico. La divergencia de este diagrama es cancelada por el contratérmino δ2 (Weinberg, 1995).

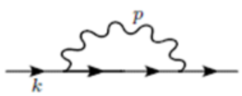
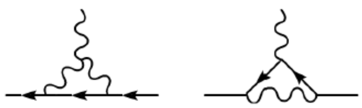


Figura 3: Contribuciones a la corrección del vértice fermión-bosón a orden g2 y cuyas divergencias son canceladas por el contratérmino δ1 (Weinberg, 1995).



Ecuación de Callan-Symanzik

Cuando se trabaja con condiciones de renormalización, la escala de renormalización es arbitraria. Se puede definir la misma teoría a una escala diferente M0. De igual forma, las funciones de Green renormalizadas a una escala M, G(n) pueden ser renormalizadas a una escala M0 distinta, con una nueva constante de acoplamiento renormalizada g0 y un nuevo factor de reescalamiento Z0 (Tong, 2007). La ecuación de Callan-Symanzik determina cómo cambian las funciones de correlación a n puntos con la escala.

$$\beta(g) = M\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{1}{2}g\sum_i \delta Z_i - \delta_g\right) \quad (2)$$

Nuestro objetivo es usar la ecuación de Callan Symanzik para obtener una expresión para la función beta en términos de derivadas de M de los contratérminos (Larin y Vermaseren, 1993), (Ritbergen y Larin, 1997), (Srednicki, 2006), (Weinberg, 1995). La función beta mide la dependencia de la constante de acoplamiento sobre la escala de renormalización. Para ejemplificar este proceso, a continuación, se muestra los resultados obtenidos para el caso de QED y teorías no Abelianas (Baikov, Chetyrkin y Kuhn, 2017).

Resultados y discusión

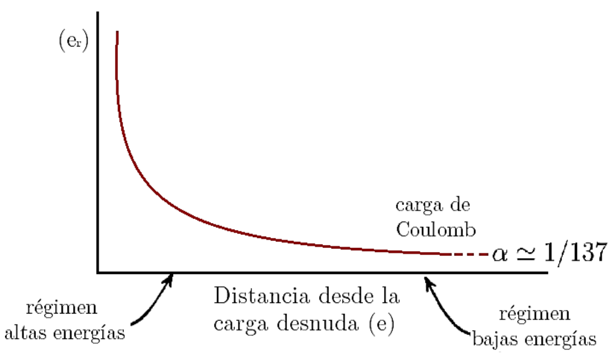
La función beta para QED a orden de 1-bucle obtenida está dada por,

$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$ (3)

Como vimos en la ecuación (1), la función beta caracteriza la variación de la constante de acoplamiento con la escala de energía M. Por tanto, el hecho de que el signo de (4.1) sea positivo ya nos proporciona información del comportamiento global de la constante de acoplamiento: la constante de acoplo renormalizada para QED aumenta cuando aumenta la escala de energía.

Por un lado, cuando se trabaja a una escala M en el régimen de bajas energías, donde la carga del electrón renormalizada es suficientemente pequeña, la función beta nos dice que es totalmente legítimo abordar QED mediante un tratamiento perturbativo siempre. Se dice entonces que QED es segura en regímenes infrarrojos ya que la aproximación perturbativa nos proporciona mejores resultados conforme vamos a energías más bajas. En el límite, a escalas de energía suficientemente pequeñas (del orden de la masa del electrón: 0,5MeV), la carga del electrón viene dada en términos de la constante de estructura fina con el valor clásico de 1/137 (Ver Figura 4).

Figura 4: Gráfica esquemática de la carga renormalizada en funcion de la escala de energía M. Aquí es la constante de estructura fina dada por α = e2=4π.



Por otro lado, cuando se incrementa la escala de energía M (a distancias cortas) el acoplamiento cada vez se hace más fuerte y la aproximación perturbativa deja de ser una metodología válida para el tratamiento de la teoría. Si quisieramos describir procesos a estas energías es estrictamente necesario cambiar el enfoque a uno no perturbativo.

Pol. Con. (Edición núm. 85) Vol. 8, No 8, Agosto 2023, pp. 2617-2630, ISSN: 2550 - 682X

En Teorías Gauge no Abelianas, ocurre totalmente lo contrario a QED. La función beta calculada en el capítulo 3 es,

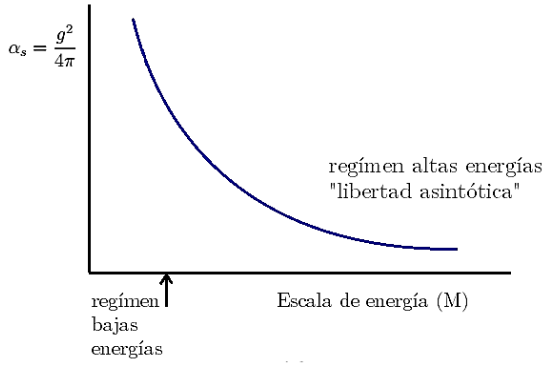
$$\beta(g) = \frac{-g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_F C(r)\right](4)$$

Para el grupo SU(N) se tiene que C2(G) = N, y C(r) = 12, valores que reemplazando en (4) resultan en,

$$\beta(g) = \frac{-g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}n_F\right](5)$$

Al fijarnos en la ecuación anterior se deduce claramente que para una pequeña cantidad de fermiones (nF) la función beta es negativa, lo que a partir de su definición, ecuación (1), implica que la constante de acoplamiento efectiva aumenta cuando M disminuye y decrece mientras M sea cada vez más grande. Este hecho implica también que la constante de acoplamiento tienda a cero conforme a escala de energía se incrementa (a distancias cortas, ver Figura 5). Este fenómeno es conocido como libertad asintótica: en el límite Ultravioleta la teoría renormalizada es libre (sin interacción).

Figura 5: Gráfica esquemática de la carga renormalizada en funcion de la escala de energía M. Aquí es la constante de estructura fina dada por α =e2=4π.



En esta clase de teorías (a diferencia de QED), el comportamiento a distancias cortas, o energías arbitrariamente altas, es completamente tratable mediante diagramas de Feynman. Aunque las divergencias ultravioletas aparezcan en cada orden de perturbación, este resultado garantiza que la constante de acoplamiento permanece débilmente acoplada, lo suficiente para tratar las divergencias que aparezcan de manera sofisticada y sin perjuicio para con la teoría. Podemos decir que teorías gauge no abelianas son seguras en regímenes Ultravioletas, siempre y cuando el número de fermiones cumpla la condición de la ecuación (5) .

Por otro lado, a distancias grandes o a bajas energías la constante de acoplamiento está fuertemente acoplada, lo cual implica que una teoría de perturbaciones deja de ser un marco válido para el estudio del comportamiento en este régimen.

Aplicación a la cromodinámica cuántica SU(3)

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría para describir las interacciones fuertes hoy en día. En adición a los campos gauge, cuyo bosón es el gluón, esta teoría involucra campos de espín 1=2 conocidos como quarks. Es bien conocido que existen seis sabores (o tipos) de quarks en total: up, charm, top, con carga eléctrica 2e/3 ; down, strange, bottom, con carga -e/3 . Cada sabor de quark puede tener tres cargas de "color" que corresponden con la representación fundamental del grupo SU(3). Con esto en mente, la función beta para QCD, con N = 3 y con nF = 6, se reduce a,

$$\beta(g) = -\frac{5g^3}{(16\pi)^2} \quad (6)$$

Como se ve en la expresión anterior, la libertad asintótica es una propiedad perteneciente a QCD. Este fenómeno está en concordancia con resultados experimentales por aceleradores donde se verificó que los partones1 y los quarks son las mismas entidades. La libertad asintótica en QCD implica que los quarks dentro de los hadrones se comportan casi como partículas libres. Decimos entonces que QCD es segura en regímenes ultravioletas, totalmente lo contrario a QED.

A distancias grandes, o equivalentemente a energías bajas, la constante de acoplamiento se hace tan fuerte que hace imposible aislar quarks individuales. Este fenómeno se denomina confinamiento, según el cual no pueden existir partículas con color aisladas, y por lo tanto no pueden ser observados directamente. En efecto, a bajas energías los quarks y gluones se asocian para formar hadrones con carga de color siempre neutra. Es así que las técnicas usuales perturbativas no son útiles para desentrañar la física detrás de este proceso. Decimos que QCD es no perturbativa a bajas energías. Es importante señalar que el confinamiento de quarks no parece tener una relación directa con que la teoría esté fuertemente acoplada a bajas energías. Experimentalmente, se ha comprobado la existencia de un estado de materia llamado plasma de

quark y gluones, consistente en un agregado de quarks y gluones deconfinados que ocurre a una escala en la que la teoría es aun fuertemente acoplada (Hees, Greco y Rapp,2006), (Heinz, 2009).
Al día de hoy, el confinamiento es un fenómeno poco entendido, y su complejidad radica en que su comportamiento es un fenómeno global que QFT en su carácter local no ha podido reconciliar. En realidad, el problema de confinamiento de quarks está considerado dentro de uno de los problemas del milenio por el Clay Mathematics Institute (Jaffe y Witten, 2000).

Conclusiones

Se encontró que la función beta en QED es positiva. Lo que implica un carácter no perturbativo en altas energías (régimen ultravioleta). A bajas energías (régimen infrarrojo), en cambio, técnicas usuales perturbativas son válidas para su descripción. En este último, QED alcanza un polo de Landau sin que éste represente una amenaza para la validez de la teoría de perturbación en este régimen.

En teorías gauge no Abelianas, se encontró que el signo de la función beta es negativo si el número de fermiones de la teoría es pequeño. En concreto, tiene que ser menor a 11/2 N. En el caso especial de SU(3), este número no debe sobrepasar los 16 fermiones. Este resultado notable implica el fenómeno de libertad asintótica en QCD, lo que resulta en que el comportamiento cuántico de los quarks y gluones en altas energías se acerca a un comportamiento clásico donde se pueden considerar como partículas (asintóticamente) libres.

En este régimen, la teoría está débilmente acoplada. QCD es perturbativa en régimenes ultravioletas.Por otro lado, QCD es no perturbativa a bajas energías, es decir, la constante de acoplamiento de QCD crece conforme la escala de energía decrece. Este hecho sugiere el confinamiento de quarks. Sin embargo, se discutió que el confinamiento de quarks no está relacionado a que la teoría este fuertemente acoplado. Esto debido a la existencia del plasma de quarks y gluones, un estado intermedio.

Para finalizar, cabe concluir que todas las teorías estudiadas en el presente trabajo deben ser consideradas como teorías efectivas a bajas energías. En concordancia al enfoque discutido en el capítulo 3, la renormalización nos dice que los detalles de la física de alta energía no afectan los efectos en el régimen de baja energía. En este sentido, el Modelo Estándar de Partículas es en realidad una teoría de campo efectiva que describe a la naturaleza (aproximadamente) a través de teorías solamente renormalizables. De existir, la única teoría completa debería ser una “Teoría del

Todo" la cual unificaría y explicaría todas las interacciones de la naturaleza con estricta rigurosidad matemática.

En trabajos futuros se sugiere como continuación de este trabajo, el estudio de las herramientas y técnicas para el cálculo de funciones beta en órdenes superiores de perturbación, e.g. métodos externos de campos, simetrías efectivas de acción, métodos computacionales o el estudio de alternativas no perturbativas.

Referencias

Baikov, Pavel, CHETYRKIN, Konstantin y KUHN, Jens (2017). Five-Loop Running of the QCD Coupling Constant. s.l. : PHYSICAL REVIEW LETTERS, Vol. 118. Disponible en: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.082002

Bogolyubov, Nikolai y PARASIUK, O. S. (1957). On the Multiplication of the causal function in the quantum theory of fields. Acta Math, Vol. 97, págs. 227-266. DOI: 10.1007/BF02392399

Cheng, Ta-Pei y LI, Ling-Fong (1988). Gauge Theory of Elementary Particle Physics. 1st Edition. ISBN: 9780198519614. Disponible en: https://library.oapen.org/handle/20.500.12657/59106

Czakon, Michal (Marzo 2005) . The four-loop QCD β-function and anomalous dimensions. Nuclear Physics B. Vol. 710, págs. 485-498. ISSN: 0550-3213. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2005.01.012

Feynman, Richard (Septiembre, 1949). Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. s.l. : American Physical Society, Phys. Rev, Vol. 76. Disponible en: https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.769

Feynman, Richard P (1948). Relativistic Cut-Off for Quantum Electrodynamics. s.l. : Physical Review, págs. 1430–1438. Vol. 74. Disponible en: https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.1430

Frampton, Paul (Septiembre, 2008). Gauge Field Theories. 3 Edición. ISBN: 3527408355. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=AwhkM6hVj-wC&dq=Paul.+H.+Frampton.+Gauge+Field+theories.+WileyVCH+Verlag,+2008.&lr=hl=es&source=gbs_navlinks_s

Gaumé, Luis Alvarez y VÁZQUEZ-MOZO, Miguel (2011). An Invitation to Quantum Field Theory. s.l. : Springer Berlin, Heidelberg, ISBN: 978-3-642-23728-7. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-642-23728-7

Glashow, Sheldon (1961). Partial-symmetries of weak interactions. Nuclear Physics. Vol. 22, págs. 579-588. Disponible en: https://doi.org/10.1016/0029-5582(61)90469-2

Gross, David y WILCZEK, Frank (1973). Asymptotically Free Gauge Theories. I. Phys.Rev., págs. 3633-3652. Disponible en: https://doi.org/10.1103/PhysRevD.8.3633

Hees, Hendrik, GRECO, Vincenzo y RAPP, Ralf (29 de Marzo de 2006). Heavy-quark probes of the quark-gluon plasma. s.l. : American Physical Society, Phys. Rev. C, Vol. 73. Disponible en: https://doi.org/10.1103/PhysRevC.73.034913

Heinz, Ulrich (8 de Mayo de 2009). The strongly coupled quark–gluon plasma created at RHIC. s.l. : IOP Publishing Ltd, J. Phys. A: Math. Theor, Vol. 42. Disponible en: https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/21/214003

Hepp, Klaus (1966). Proof of the Bogoliubov-Parasiuk theorem on renormalization. Communications in Mathematical Physics, Vol. 2, págs. 301–326. Disponible en: https://doi.org/10.1007/BF01773358

Jaffe, Arthur y WITTEN, Edward (2000). Quantum Yang-Mills Theory. s.l. : Clay Mathematics Institute. Disponible en: https://www.claymath.org/sites/default/files/yangmills.pdf

Larin, S y VERMASEREN, J (Abril 1993). The three-loop QCD β-function and anomalous dimensions. Physics Letters B. Vol. 303, págs. 334-336. ISSN: 0370-2693. Disponible en: https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91441-O

Luthe, Thomas , MAIER, Andreas y MARQUARD, Peter (2017). The five-loop Beta function for a general gauge group and anomalous dimensions beyond Feynman gauge. Journal of High Energy Physics. Disponible en: https://doi.org/10.1007/JHEP10(2017)166

Odom, Brian; HANNEKE, David; D`URSO, Brian y GABRIELSE, Gerald (2006). New Measurement of the Electron Magnetic Moment Using a One-Electron Quantum Cyclotron. s.l. : American Physical Society. Vol. 97. Disponible en: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.030801

Peskin, Michael y SCHROEDER, Daniel (1995). An Introduction To Quantum Field Theory. 1st Edición. s.l. : Avalon Publishing. ISBN: 9780429503559. Disponible en: https://doi.org/10.1201/9780429503559

Politzer, David (1973). Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? s.l. : Phys. Rev. págs. 1346--1349. Vol. 30. Disponible en: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1346

Ramond (2011). Group Theory A Physicist`s Survey. New York : Physics Today 64, 6, 53. pág. 53. Vol. 64. ISBN: 978-0-521-89603-0. Disponible en: https://doi.org/10.1063/1.3603919

Ritbergen, Timo , VERMASEREN, J y LARIN, S (Mayo, 1997). The four-loop β-function in quantum chromodynamics. Physics Letters B.Vol. 400, págs. 379-384. ISSN: 0370-2693. Disponible en: https://doi.org/10.1016/S0370-2693(97)00370-5

Salam, Abdus y WARD, John (1959). Weak and electromagnetic interactions. s.l. : Il Nuovo Cimento (1955-1965). págs. 568–577. Disponible en: https://doi.org/10.1007/BF02726525

Schweber, Silvan (1994). QED and the Men Who Made it: Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga. s.l. : Physics Today 47, 12, 59. pág. 59. ISBN: 0-691-03327-7. Disponible en: https://doi.org/10.1063/1.2808749

Srednicki, Mark (2006). Quantum Field Theory. University of California, Santa Barbara : s.n. Disponible en: https://web.physics.ucsb.edu/~mark/ms-qft-DRAFT.pdf

'T Hooft, Gerard (1999). When was asymptotic freedom discovered? Nuclear Physics B. 1999, Vol. 74, págs. 413-425. ISSN: 0920-5632. Disponible en: https://doi.org/10.1016/S0920-5632(99)00207-8

T´Hooft, Gerardus y VELTMAN, Martinus (1972). Regularization and renormalization of gauge fields. Nuclear Physics B. Vol. 44, págs. 189-213. ISSN: 0550-3213. Disponible en: https://doi.org/10.1016/0550-3213(72)90279-9

Tomonaga, Shinichiro (1946). On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields. s.l. : Progress of Theoretical Physics. págs. 27–42. Vol. 1. ISSN: 1347-4081. Disponible en: https://doi.org/10.1143/PTP.1.27

Tong, David (2007). Quantum Field Theory. s.l. : University of Cambridge. Disponible en: https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/qft.pdf

Weinberg, Steven (1967). A model of leptons. Massachusetts : American Physical Society. págs. 1264-1266. Disponible en: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1264

Weinberg, Steven (1995). The Quantum Theory of Fields. s.l. : Cambridge University Press, Vol. 1. ISBN: 9781139644167. Disponible en: https://doi.org/10.1017/CBO9781139644167

Wilson, Kenneth (1975). The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem. s.l. : Rev. Mod. Phys. págs. 773-840. Vol. 47. Disponible en: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.47.773

Yang, Chen Ning y MILLS, Robert (1954). Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. s.l. : Physical Review. págs. 191-195. Disponible en: https://doi.org/10.1103/PhysRev.96.191

Zimmermann, W (1970). Lectures on elementary particles and quantum field theory. Vol. 1. Disponible en: https://www.osti.gov/biblio/4045871