



Análisis estructural de una armadura aplicando el método de la rigidez considerando asentamiento y apoyo rotado

Structural analysis of a reinforcement applying the stiffness method considering settlement and rotated support

Análise estrutural de uma armadura aplicando o método da rigidez considerando recalques e apoios rotacionados

Marcos Josué Rupay-Vargas ^I
mrupay@uniscjsa.edu.pe
<https://orcid.org/0000-0002-7891-1838>

Rossmery Lizbeth Hinostroza-Enrique ^{II}
rossmeryhinostrozaenrique@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0008-0340-8606>

Freddy Joel Garamende-Bautista ^{III}
fjgaramende@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0009-3549-7866>

Ángel Brayan Loayza-Pérez ^{IV}
bryanloayzaloper@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0002-5717-280X>

Adriana Carla Buendía-Ramos ^V
adrianatase10@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0004-8620-0472>

Correspondencia: mrupay@uniscjsa.edu.pe

Ciencias Técnicas y Aplicadas
Artículo de Investigación

***Recibido:** 23 de abril de 2023 ***Aceptado:** 16 de mayo de 2023 * **Publicado:** 08 de junio de 2023

- I. Maestrante Candidato a Doctor Marcos Josué Rupay Vargas.
- II. Estudiante de la Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Junín, Perú.
- III. Estudiante de la Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Junín, Perú.
- IV. Estudiante de la Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Junín, Perú.

Resumen

En el presente artículo se detalla el procedimiento denominado método directo de la rigidez con el objetivo de obtener las deformaciones y las fuerzas internas ya sea en tensión o compresión de las barras que conforman una armadura plana de dos dimensiones. La metodología de esta investigación es descriptiva y el enfoque cuantitativo; y consiste en obtener un sistema Q-D en el que definimos el número de grados de libertad a la que se asigna las cargas nodales, además del sistema primario que toma en cuenta sollicitaciones externas, y un sistema complementario en el que se da un valor unitario al desplazamiento, y finalmente realizar la comprobación de los resultados obtenido a través de software Ftool. Se concluye que el método directo de la rigidez facilita el análisis estructural de armaduras hiperestáticas con dos o más grados de libertad, y además al realizar la verificación de resultados con el software mencionado se determina que la variación es mínima, por lo la aplicación de esta metodología es confiable.

Palabras Claves: Armadura; Método de Rigidez; Sistema Q-D; Sistema Primario; Sistema Complementario.

Abstract

This article details the procedure called direct rigidity method with the objective of obtaining the deformations and internal forces, either in tension or compression, of the bars that make up a two-dimensional flat reinforcement. The methodology of this research is descriptive and the quantitative approach; and consists of obtaining a Q-D system in which we define the number of degrees of freedom to which the nodal loads are assigned, in addition to the primary system that takes external forces into account, and a complementary system in which a value is given unit to the displacement, and finally carry out the verification of the results obtained through the Ftool software. It is concluded that the direct method of stiffness facilitates the structural analysis of hyperstatic reinforcements with two or more degrees of freedom, and also when performing the verification of results with the mentioned software, it is determined that the variation is minimal, therefore the application of this methodology is reliable.

Keywords: Truss; Stiffness Method; Q-D System; Primary System; Complementary System.

Resumo

Este artículo detalla el procedimiento denominado método de rigidez directa con el objetivo de obtener las deformaciones y esfuerzos internos, sea en tracción o compresión, de las barras que componen una armadura plana bidimensional. La metodología de esta investigación es descriptiva y de abordaje cuantitativa; y consiste en obtener un sistema Q-D en el que definimos el número de grados de libertad a los que se atribuyen las cargas nodales, además del sistema primario que toma en cuenta las fuerzas externas, y un sistema complementario en el que se da un valor unitario para el desplazamiento, y por último realizar la verificación de los resultados obtenidos mediante el software Ftool. Se concluye que el método directo de rigidez facilita el análisis estructural de armaduras hiperestáticas con dos o más grados de libertad, y también al realizar la verificación de los resultados con el referido software, se determina que la variación es mínima, por lo tanto la aplicación de esta metodología es confiable.

Palabras-clave: Armaduras; Método de Rigidez; sistema Q-D; Sistema Primario; Sistema Complementario.

Introducción

La armadura, según McCormac (2002) es una estructura básica, elaborada mediante elementos estructurales, dispuestos en forma de uno o más triángulos tal que las cargas externas solo se aplican en los nudos, por lo que solo causan fuerzas axiales (tensión o compresión) sobre los elementos, los cuales están conectados por nudos articulados permitiendo la liberación de momentos.

Para analizar estas armaduras existen diferentes métodos, pero en el presente artículo utilizaremos el método directo de la rigidez, que desde nuestro punto de vista resulta ventajoso sobre los demás; ya que su aplicación es más accesible sin importar si las estructuras sean isostáticas o hiperestáticas, considerando solicitaciones externas (asentamiento) y con apoyos (fijos o móviles) rotados respecto a la horizontal. Los conceptos y procesos detallados del cálculo se explicarán a continuación.

Método directo de la rigidez

El método directo de la rigidez se basa en el cumplimiento de las siguientes características:

- I. **Compatibilidad:** La deformación es una función continua y tiene un valor único en cada punto. En consecuencia, los movimientos también lo son, y en particular, los

movimientos en los extremos de las piezas que ocurren en un mismo nudo son idénticos para todas las piezas.

- II. **Equilibrio:** tanto la estructura globalmente con cada parte de la misma, y en particular cada nudo y cada pieza e la misma está en equilibrio estático, bajo la acción de las fuerzas exteriores de los esfuerzos internos.
 - III. **Linealidad y principio de superposición:** La estructura se comporta linealmente tanto a nivel local (relación tensión- deformación según la Ley de Hooke), como a nivel global (relaciones desplazamiento-deformación y fuerzas –tensiones, según hipótesis de los pequeños movimientos). En virtud de esta linealidad, es válido el principio de superposición. Asimismo, establece la superposición de fuerzas o desplazamientos nulos más un caso de F o D unitarios (multiplicados por las incógnitas) para alcanzar resultados reales.
- Se emplea en estructuras isostáticas e hiperestáticas.

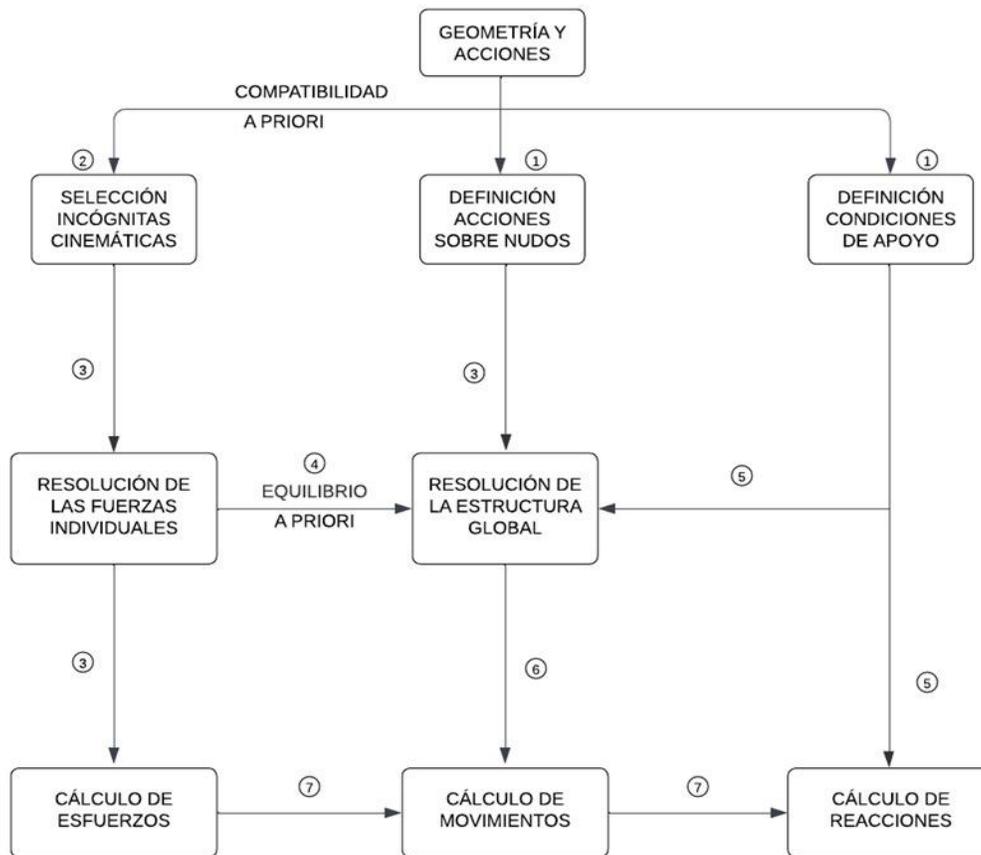


Figura 1

Esquema de resolución en el caso del Método de la Rigidez

Nota. El gráfico muestra el proceso secuencial de resolución mediante el Método de Rigidez. Tomado de métodos energéticos y matricial con aplicaciones Mathcad, (Godiño, Lopez y Rupay, 2017, p.257).

Armaduras

Hibbeler (2012) define a la armadura como una “estructura compuesta de elementos delgados unidos en sus extremos” (p.79). A su vez, McCormac (2002), describe a la armadura como una estructura que está compuesta de elementos que forman figuras geométricas como triángulos o rectángulos y que en los nodos se les puede aplicar cargas. Asimismo, nos dice que las barras de la armadura van a estar dispuestas a fuerzas de tensión o compresión.

Para poder desarrollar el análisis de las armaduras, se debe tomar en cuenta los siguientes puntos:

- Las cargas externas así como las reacciones en las armaduras sólo se aplican en los nudos.
- Los elementos de la armadura están vinculados por medio de pasadores lisos.

- Las fuerzas que actúan en los miembros de las armaduras son de tensión o de compresión.

Materiales y métodos

Determinar el análisis estructural de la armadura mostrada en la figura N° 2 aplicando el método directo de la rigidez. Se sabe que las barras tienen una sección transversal de $A = 4000\text{mm}^2$ y Módulo de Young $E = 200\text{GPa}$. Asimismo, se observa un desplazamiento vertical debido a un asentamiento en el nodo 1 de 25mm (\downarrow).

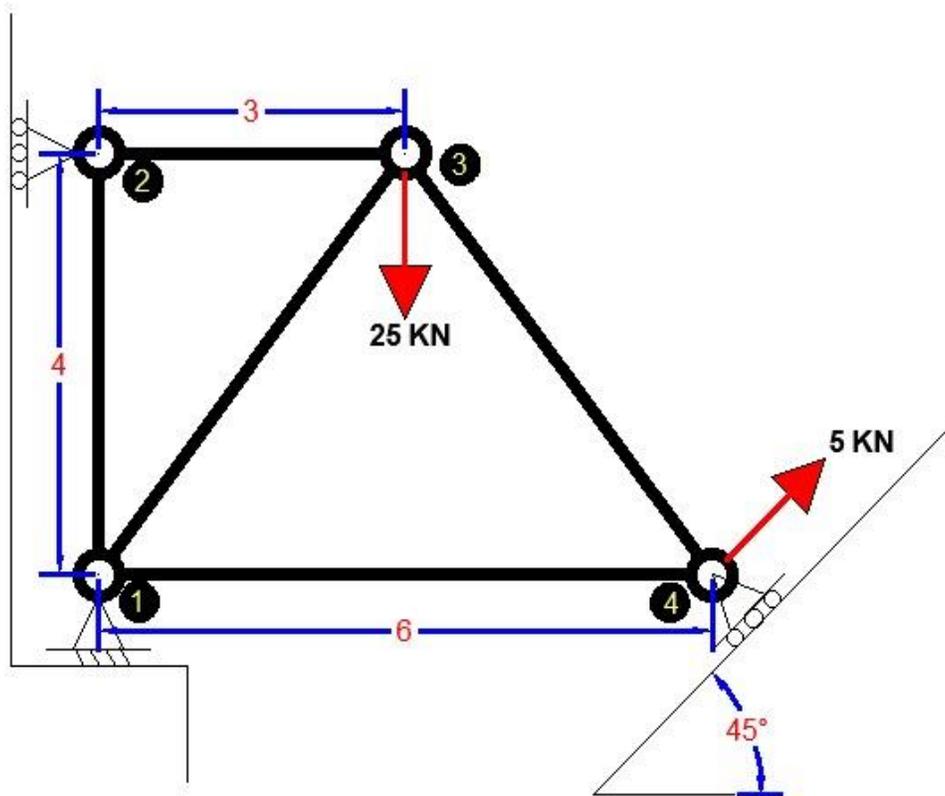


Figura 2

Ejercicio de aplicación

Nota. Armadura propuesta con asentamiento y apoyo rotado. Elaboración propia.

Paso 1: Sistema Q-D

Se plantea el sistema Q-D basado en los grados de libertad que se encuentran en la estructura. “Los grados de libertad de una estructura son el número mínimo de parámetro, desplazamientos

(traslaciones y rotaciones) que describen de manera única la deformada estructura” (Godiño, Lopez y Rupay, 2017, p.257).

En otras palabras, los GDL describen el comportamiento de una estructura en función de los desplazamientos y fuerzas que están relacionados con un número de grados de libertad.

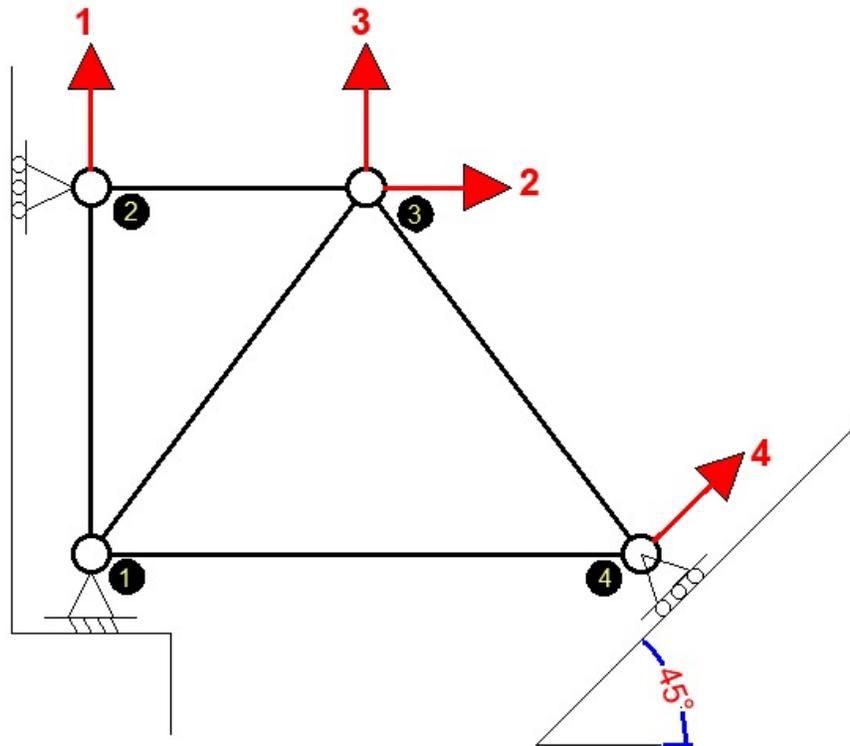


Figura 3
Sistema Q-D

Nota. Sistema Q-D propuesto para la armadura. Elaboración propia.

Por tanto, tendremos el vector de carga “Q”:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \\ 10 \end{bmatrix} KN$$

Paso 2: Sistema primario

Según Ottazi (2014), este estado consiste en “analizar la estructura con todas las solicitaciones externas adicionando un grupo de restricciones denominadas $\{R\}$ medidas en el sistema de coordenadas Q-D tales que los desplazamientos en los grados de libertad elegidos para el análisis sean nulos $\{D\} = \{0\}$ ” (p. 172).

Es decir, se evalúan solicitaciones como cargas nodales, asentamientos en apoyos, efectos de temperatura y error de fabricación. Los grados de libertad se consideran restricciones y por lo tanto, surge un vector de reacciones que se sitúan en las coordenadas del sistema Q-D.

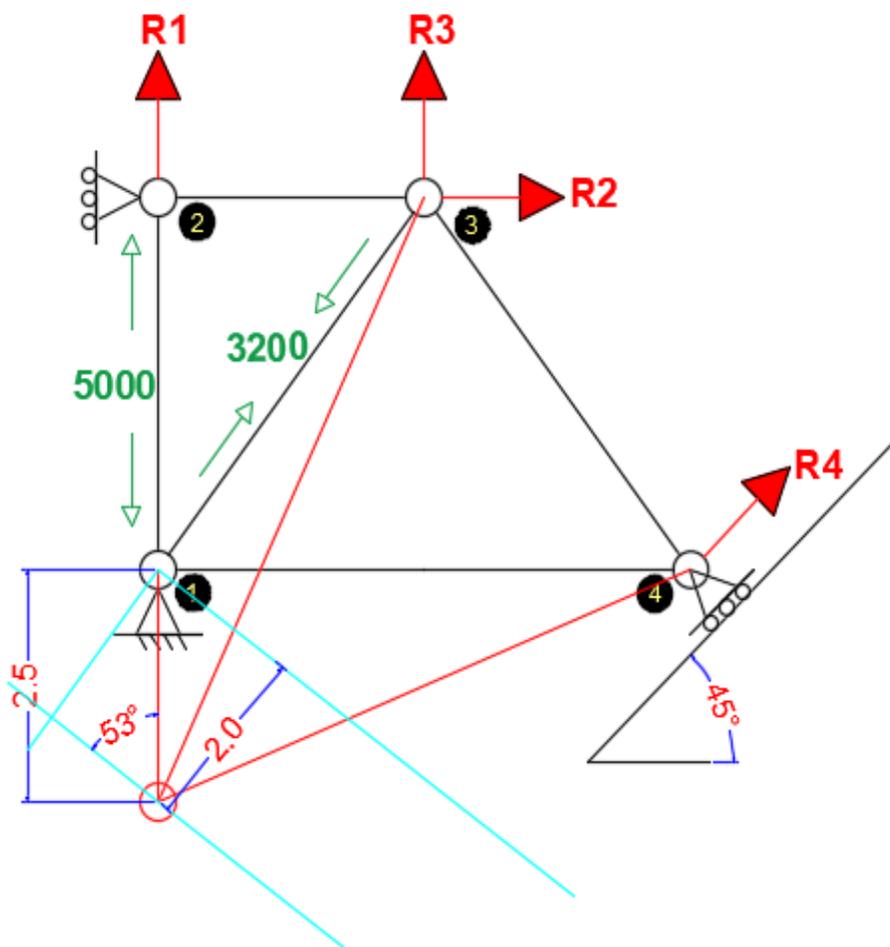


Figura 4

Sistema primario propuesto

Nota. Sistema primario propuesto para la armadura. Elaboración propia.

Para hallar las fuerzas en las barras que estén asociadas a las deformadas 1-3 y 1-2, se empleará la siguiente fórmula:

$$F = \frac{EA}{L} * \Delta$$

Donde:

- F: Fuerza en la barra
- E: Módulo de elasticidad de la barra
- A: Área de la barra
- L: Longitud de la barra
- Δ : Deformación de la barra

Entonces, se tiene:

$$D_{13} = 20 ; \quad F_{13} = \frac{200 * 4000}{4000} * 20 = 3200$$

$$D_{12} = 25 ; \quad F_{12} = \frac{200 * 4000}{4000} * 25 = 5000$$

En la siguiente se muestra, los resultados de las redundantes del sistema primario:

$$R_1 = 5000$$

$$R_2 = 3200 \left(\frac{3}{5}\right) = 1920$$

$$R_3 = 3200 \left(\frac{4}{5}\right) = 2560$$

$$R_4 = 0$$

$$R = \begin{bmatrix} 5000 \\ 1920 \\ 2560 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Sistema complementario

En esta parte, se le asigna un valor unitario a cada grado de libertad propuesto, y se hallan los coeficientes de rigidez.

Para hallar las fuerzas en las barras que estén asociadas a las deformadas, se empleará la siguiente fórmula:

$$F = \frac{EA}{L} * \Delta$$

Donde:

- F: Fuerza en la barra
- E: Módulo de elasticidad de la barra
- A: Área de la barra
- L: Longitud de la barra
- Δ : Deformación de la barra

Entonces, se lleva a cabo la solución, de las siguientes redundantes para obtener una matriz “k” de 4x4:

Para :

$$D1 = 1$$

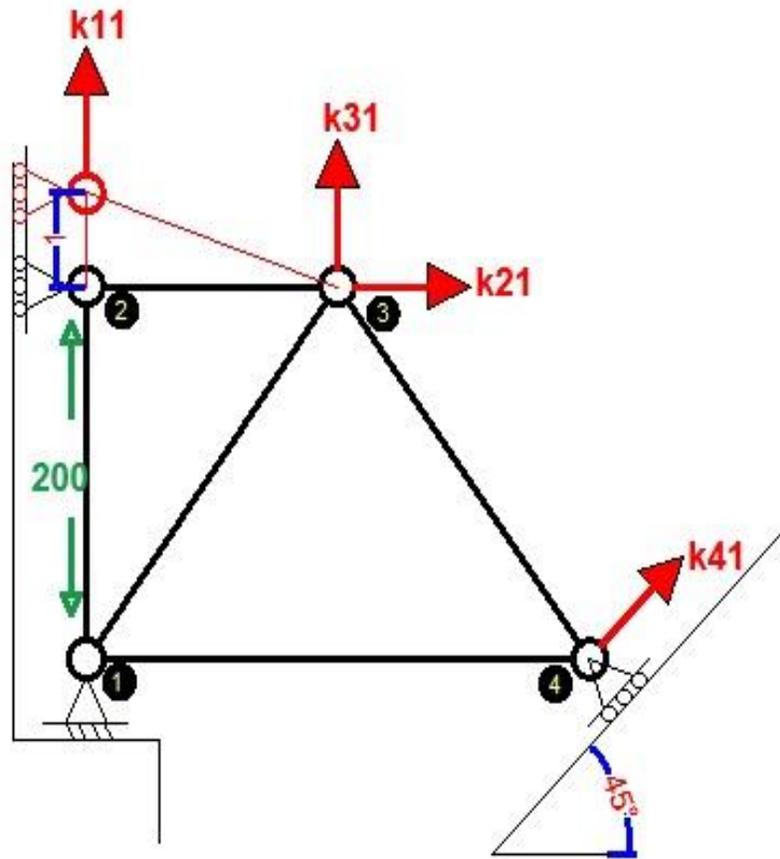


Figura 5

Desplazamiento unitario respecto a la redundante 1

Nota. Elaboración propia.

Deformada y fuerza en las barra:

$$D_{12} = 1; \quad F_{12} = \frac{200 * 4000}{4000} * 1 = 200$$

Seguidamente, tenemos los coeficientes de rigidez de la primera redundante:

$$k_{11} = 200$$

$$k_{21} = 0$$

$$k_{31} = 0$$

$$k_{41} = 0$$

Para

$$D_2 = 1$$

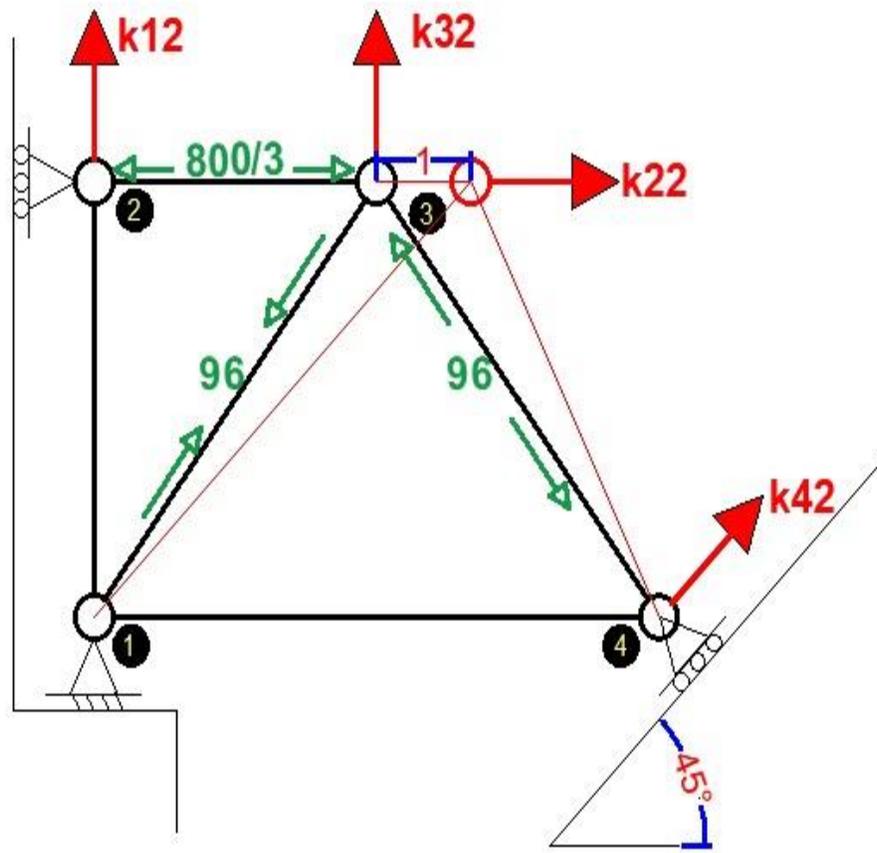


Figura 6

Desplazamiento unitario respecto a la redundante 2

Nota. Elaboración propia.

A continuación, se detalla las deformadas de las barras relacionadas al desplazamiento unitario.

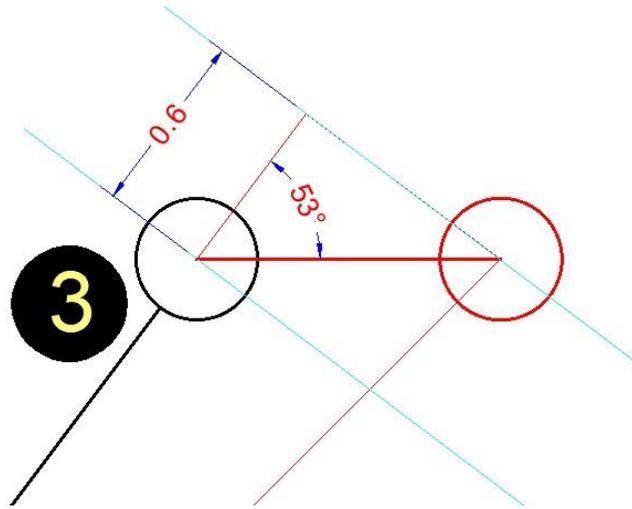


Figura 7

Deformada de la barra 1-3

Nota. Elaboración propia.

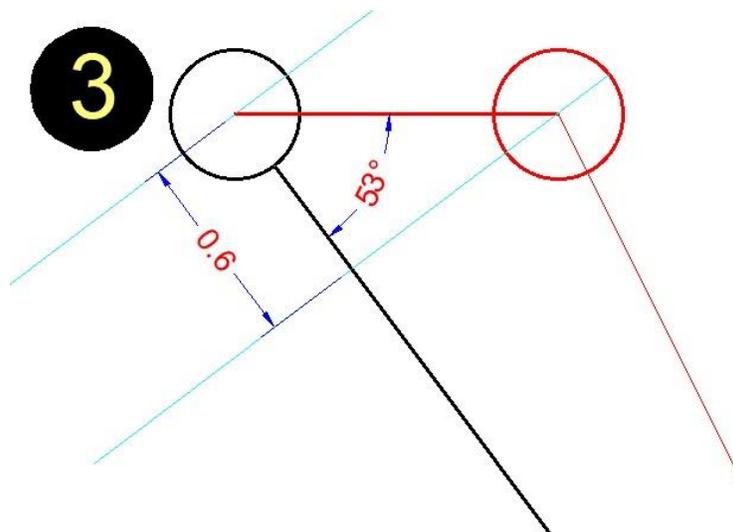


Figura 8

Deformada de la barra 3-4

Nota. Elaboración propia.

Se descompone la fuerza de 96kN, para hallar el coeficiente de rigidez k_{42} .

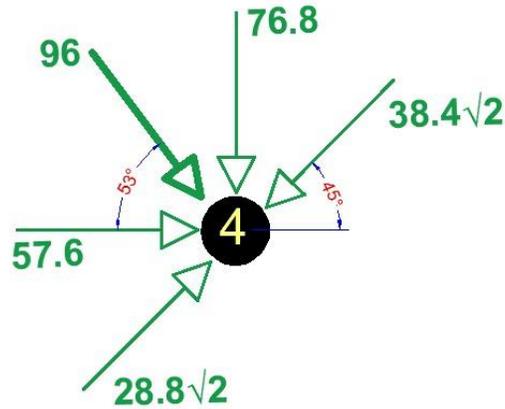


Figura 9
Descomposición de fuerzas
Nota. Elaboración propia.

Deformadas y fuerzas en las barras:

$$D_{23} = 1; \quad F_{23} = \frac{200 * 4000}{3000} * 1 = 800/3$$

$$D_{13} = 0.6; \quad F_{13} = \frac{200 * 4000}{5000} * 0.6 = 96$$

$$D_{34} = 0.6; \quad F_{34} = \frac{200 * 4000}{5000} * 0.6 = 96$$

Los coeficientes de rigidez de la segunda redundante:

$$k_{12} = 0$$

$$k_{22} = 96 \left(\frac{3}{5}\right) + 96 \left(\frac{3}{5}\right) + 800/3 = 5728/15$$

$$k_{32} = 96 \left(\frac{4}{5}\right) - 96 \left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$k_{42} = 13.5764$$

Para :

$$D_3 = 1$$

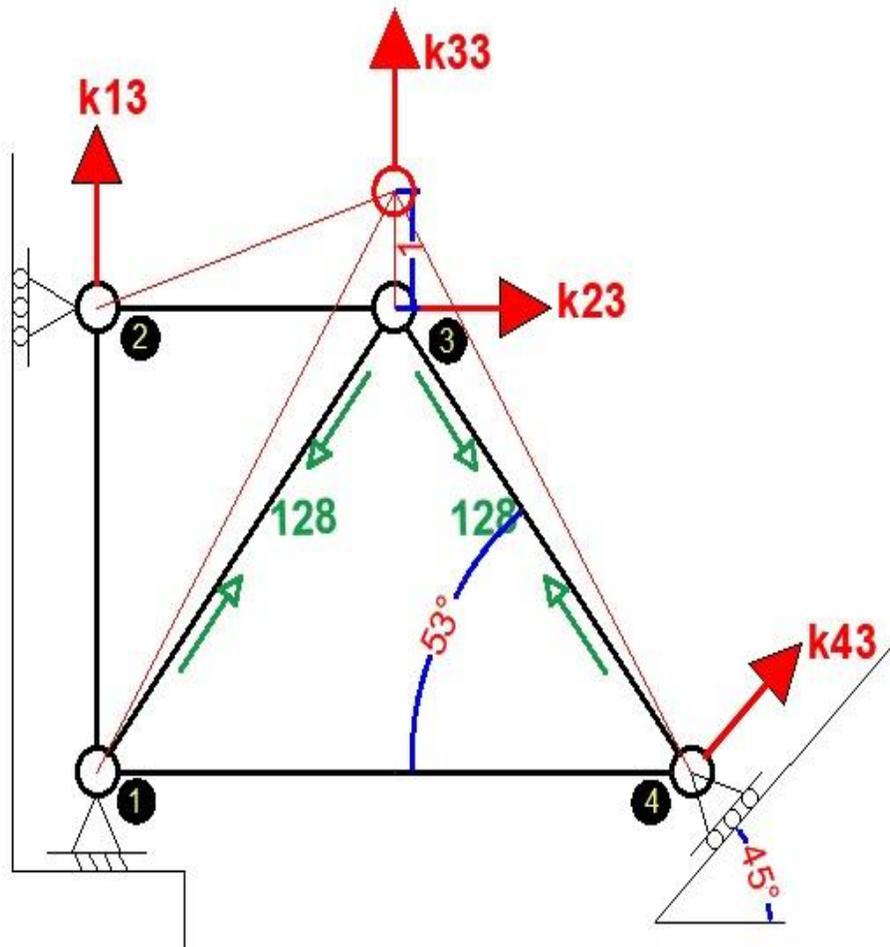


Figura 10

Desplazamiento unitario respecto a la redundante 3

Nota. Elaboración propia.

Deformadas de las barras relacionadas al desplazamiento unitario.

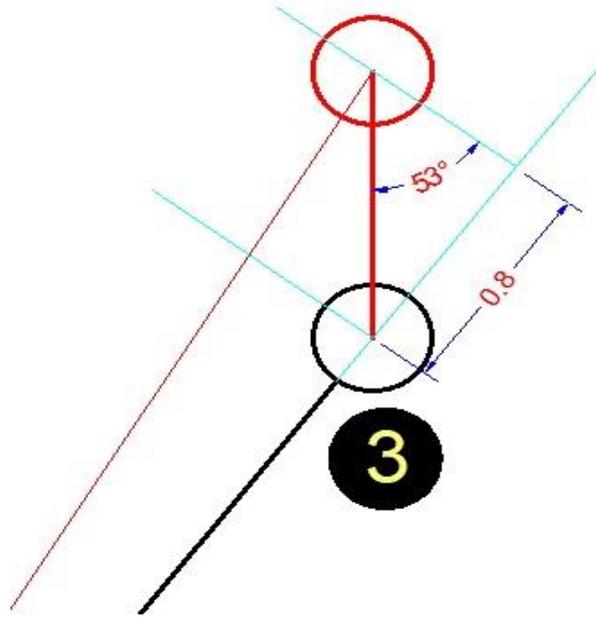


Figura 11
Deformada de la barra 1-3
Nota. Elaboración propia.

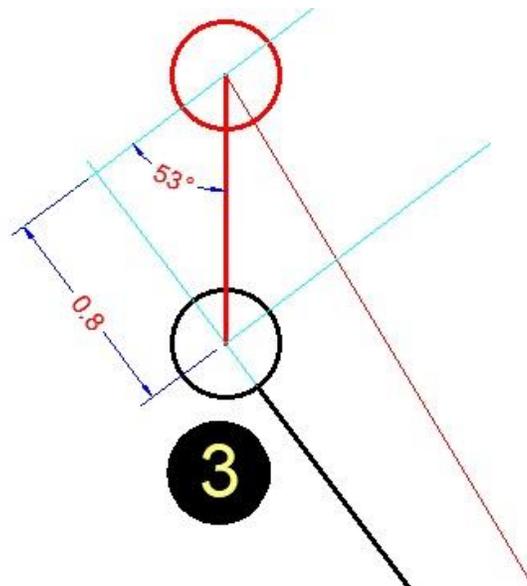


Figura 1
Deformada de la barra 1-3
Nota. Elaboración propia.

Se descompone la fuerza de 128kN, para hallar el coeficiente de rigidez k_{43} .

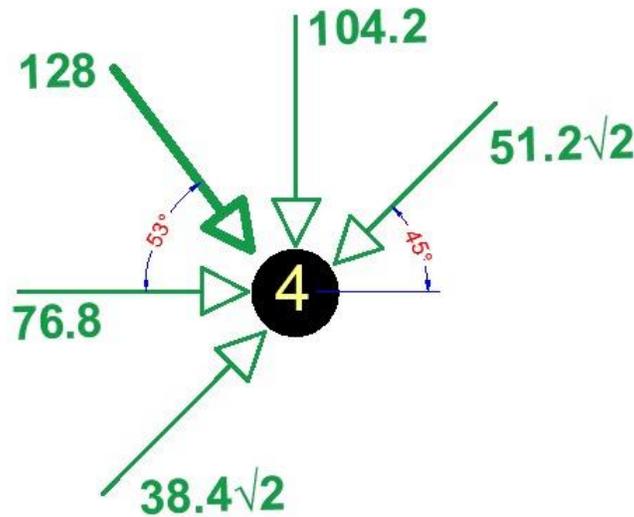


Figura 13
Descomposición de fuerzas
Nota. Elaboración propia.

Deformadas y fuerzas en las barras:

$$D_{13} = 0.8; \quad F_{13} = \frac{200 * 4000}{5000} * 0.8 = 128$$

$$D_{34} = 0.8; \quad F_{34} = \frac{200 * 4000}{5000} * 0.8 = 128$$

Los coeficientes de rigidez de la tercera redundante:

$$k_{13} = 0$$

$$k_{23} = 128 \left(\frac{3}{5}\right) - 128 \left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$k_{33} = 128 \left(\frac{4}{5}\right) + 128 \left(\frac{4}{5}\right) = 204.8$$

$$k_{43} = -18.1019$$

Para :

$$D_4 = 1$$

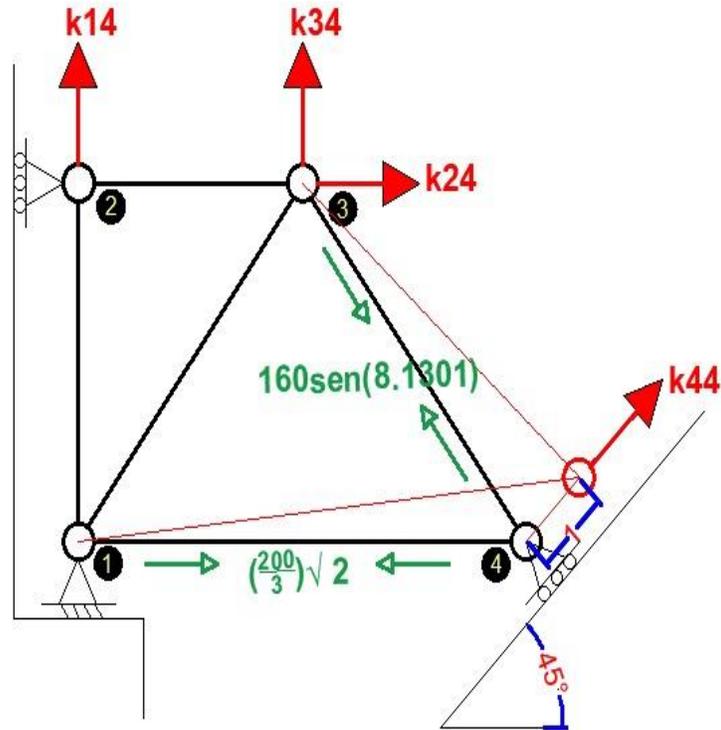


Figura 14

Desplazamiento unitario respecto a la redundante 4

Nota. Elaboración propia.

Deformadas de las barras relacionadas al desplazamiento unitario.

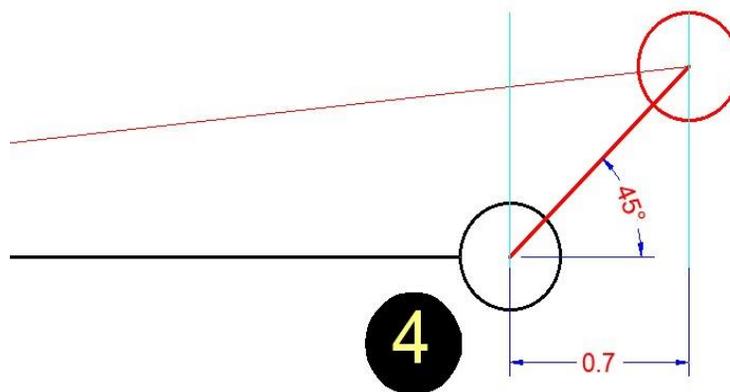


Figura 15

Deformada de la barra 1-4

Nota. Elaboración propia.

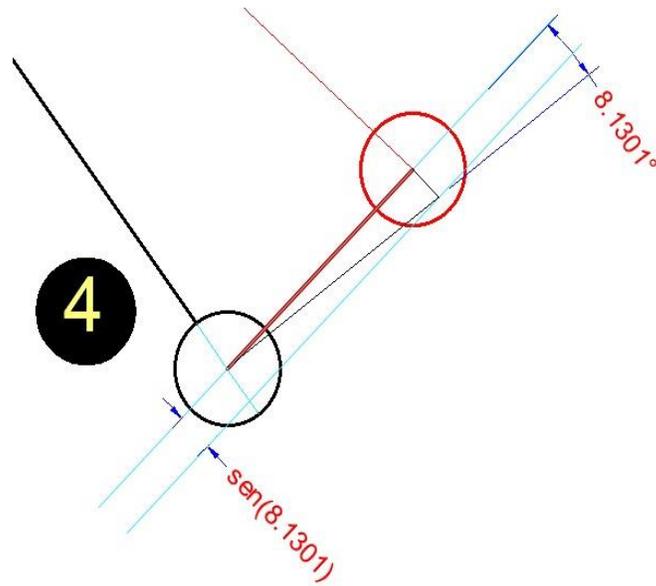


Figura 16

Deformada de la barra 3-4

Nota. Elaboración propia.

Se descompone la fuerza de $160\text{sen}(8.1301)$ kN y la fuerza de $200/3(\sqrt{2})$ kN, para hallar el coeficiente de rigidez k_{44}

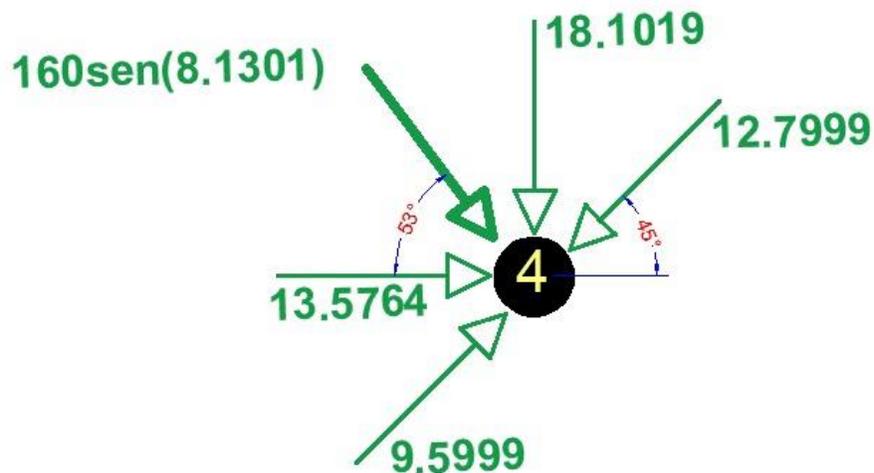


Figura 17

Descomposición de la fuerza $160\text{sen}(8.1301)$ kN

Nota. Elaboración propia.

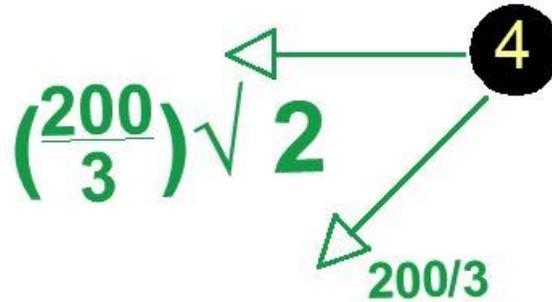


Figura 18

Descomposición de la fuerza $200/3(\sqrt{2})$ kN.

Nota. Elaboración propia.

Deformadas y fuerzas en las barras:

$$D_{34} = \text{sen}(8.1301); \quad F_{34} = \frac{200 * 4000}{5000} * \text{sen}(8.1301) = 160 \text{ sen}(8.1301)$$

$$D_{14} = \sqrt{2}/2; \quad F_{14} = \frac{200 * 4000}{6000} * \sqrt{2}/2 = \frac{200}{3} \sqrt{2}$$

Los coeficientes de rigidez de la cuarta redundante:

$$k_{14} = 0$$

$$k_{24} = 160 \text{ sen}(8.1301) \left(\frac{3}{5}\right) = 13.5764$$

$$k_{34} = 160 \text{ sen}(8.1301) \left(\frac{4}{5}\right) = -18.1019$$

$$k_{44} = 69.8667$$

Seguidamente, se ensambla la matriz de rigidez, con los valores obtenidos a partir del sistema complementario. Se debe verificar que se cumplan las características de la matriz:

- El tamaño de la matriz va a estar en función al sistema Q-D.
- La matriz de rigidez es una matriz cuadrada.
- La diagonal principal siempre es positivo.

d) La matriz de rigidez es simétrica.

$$K = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5728/15 & 0 & 13.5764 \\ 0 & 0 & 204.8 & -18.1019 \\ 0 & 13.5764 & -18.1019 & 69.8667 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Vector de deformación

Después se calcula las deformaciones en los nodos mediante la siguiente fórmula:

$$\{Q\} = \{R\} + [K] * \{D\}$$

Se despeja el vector $\{D\}$, y se obtiene:

$$\{D\} = [K]^{-1} * (\{Q\} - \{R\})$$

$$D = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5728/15 & 0 & 13.5764 \\ 0 & 0 & 204.8 & -18.1019 \\ 0 & 13.5764 & -18.1019 & 69.8667 \end{bmatrix}^{-1} * \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5000 \\ 1920 \\ 2560 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$D = \begin{bmatrix} -25 \\ -4.9491 \\ -12.8179 \\ -2.2162 \end{bmatrix} mm$$

Paso 5: Fuerzas internas

Para hallar las fuerzas que se aplican a las barras, a tensión o a compresión se emplea lo siguiente:

$$Q_{axial} = \{R\} + [K] * \{D\}$$

$$Q_{axial} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 0 \\ 3200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 800/3 & 0 & 0 \\ 0 & 96 & 128 & 0 \\ 0 & -96 & 128 & -160\text{sen}(8.1301) \\ 0 & 0 & 0 & 94.2809 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -25 \\ -4.9491 \\ -12.8179 \\ -2.2162 \end{bmatrix}$$

$$Q_{axial} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1319.76 \\ 1084.1592 \\ -1115.4307 \\ -208.9453 \end{bmatrix}$$

Paso 6: Comprobación con el software FTOOL

Se graficó la armadura propuesta en el ejercicio, en el software FTOOL y se obtuvo el siguiente diagrama.

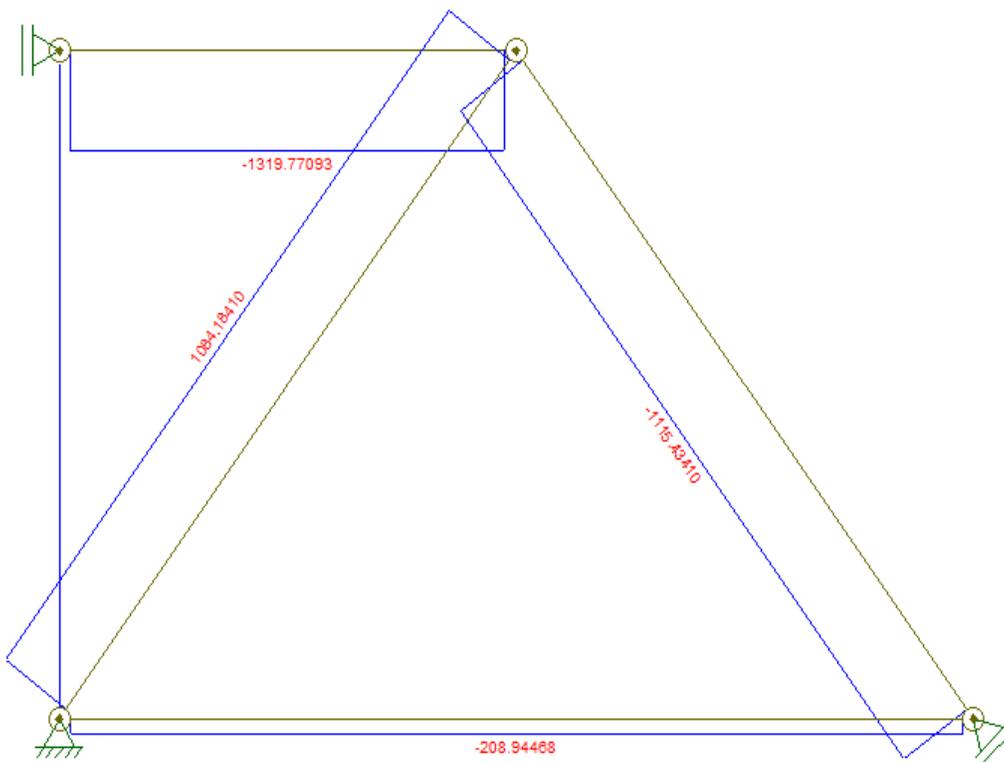


Figura 19

Diagrama de fuerzas internas

Nota. Elaboración propia.

Y a su vez, las deformaciones:

```
Node
Results

Support
Reactions:
  Fx = 1319.77093 kN
  Fy = 0.00000 kN
  Mz = 0.00000 kNm

Nodal
Displacements:
  Dx = 0.000 mm
  Dy = -25.000 mm
  Rz = 0.000e+00 rad
```

Figura 20

Deformación en el nudo 1

Nota. Elaboración propia.

```
Node
Results

Support
Reactions:
  Fx = -441.56578 kN
  Fy = -867.34728 kN
  Mz = 0.00000 kNm

Nodal
Displacements:
  Dx = 0.000 mm
  Dy = -25.000 mm
  Rz = 0.000e+00 rad
```

Figura 21

Deformación en el nudo 2

Nota. Elaboración propia.

```
Node
Results

Support
Reactions:
None

Nodal
Displacements:
Dx = -4.949 mm
Dy = -12.818 mm
Rz = 0.000e+00 rad
```

Figura 22
Deformación en el nudo 3
Nota. Elaboración propia.

```
Node
Results

Support
Reactions:
Fx = -885.27621 kN
Fy = 885.27621 kN
Mz = 0.00000 kNm

Nodal
Displacements:
Dx = -1.567 mm
Dy = -1.567 mm
Rz = 0.000e+00 rad
```

Figura 23
Deformación en el nudo 4
Nota. Elaboración propia.

En este caso, al ser un apoyo rotado, se muestran las deformaciones descompuestas; por lo tanto, aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el módulo de la deformación.

$$D_4 = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}$$
$$D_4 = \sqrt{-1.567^2 + -1.567^2}$$
$$D_4 = 2.2162mm$$

Conclusión

- En conclusión, seguir los pasos (1, 2, 3, 4 y 5) detalladamente y aplicar los criterios necesarios, nos da una respuesta certera y exacta en su mayoría al cálculo de deformaciones y fuerzas internas.
- Se concluye que el método de rigidez, nos ayuda a obtener en este caso las deformaciones y fuerzas internas en la estructura analizada.
- Se concluye que los resultados de las fuerzas internas calculados mediante el método de rigidez, son semejantes en un gran porcentaje a los resultados obtenidos en el programa FTOOL.
- Se concluye que los resultados de las deformaciones calculados mediante el método de rigidez, son iguales a los resultados obtenidos en el programa FTOOL.

Agradecimiento

- Expresamos un sincero e imperecedero agradecimiento al Magister Ingeniero Marcos Josue Rupay Vargas por el apoyo y las constantes asesorías que nos brindó como docente y profesional, motivándonos a la investigación.
- Nuestro sincero agradecimiento a los autores correspondientes de la bibliografía empleada.

Referencias

1. Godiño Poma, F., López Yarango, J. S., & Rupay Vargas, M. J. (2017). *Análisis Estructural I. Métodos Energético y Matricial con Aplicaciones Mathcad*. Huancayo: Impresos S.R.L.
2. Hibbeler, R. C. (2012). *Análisis estructural*. PEARSON.

3. McCormac, J., & Elling, R. (1994). *Análisis de Estructuras: Método clásico y matricial*. Ediciones Alfaomega.
4. Ottazi Pasino, G. (2014). *Apuntes del curso Análisis Estructural I*.

© 2023 por los autores. Este artículo es de acceso abierto y distribuido según los términos y condiciones de la licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).