



## *Breve análisis de las ecuaciones diferenciales con retardo*

### *Brief discussion of differential equations with delay*

### *Breve discussão de equações diferenciais com atraso*

Bladimir Enrique Urgiles Rodríguez<sup>I</sup>  
[bladimir.urgiles@esPOCH.edu.ec](mailto:bladimir.urgiles@esPOCH.edu.ec)  
<https://orcid.org/0000-0002-9734-7814>

Fernando Ricardo Márquez Sañay<sup>III</sup>  
[fernando.marquez@esPOCH.edu.ec](mailto:fernando.marquez@esPOCH.edu.ec)  
<https://orcid.org/0000-0001-5549-9572>

Katherine Gissel Tixi Gallegos<sup>II</sup>  
[katherine.tixi@esPOCH.edu.ec](mailto:katherine.tixi@esPOCH.edu.ec)  
<https://orcid.org/0000-0002-7545-9671>

Marcelo Eduardo Allauca Peñafiel<sup>IV</sup>  
[mallauca@esPOCH.edu.ec](mailto:mallauca@esPOCH.edu.ec)  
<https://orcid.org/0000-0002-5431-0704>

**Correspondencia:** [bladimir.urgiles@esPOCH.edu.ec](mailto:bladimir.urgiles@esPOCH.edu.ec)

Ciencias Técnicas y Aplicadas  
Artículo de Investigación

\* **Recibido:** 23 de abril de 2022 \* **Aceptado:** 12 de mayo de 2022 \* **Publicado:** 21 de junio de 2022

- I. Docente de la Carrera de Administración de Empresas, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ecuador.
- II. Docente de la Facultad de Ciencias, Ingeniería Química, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ecuador.
- III. Docente de la carrera de Administración de Empresas, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ecuador.
- IV. Técnicos Docente del Centro de Idiomas, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ecuador.



## Resumen

El objetivo de la presente investigación, fue realizar un breve análisis de las ecuaciones diferenciales con retardo, ya que son aplicadas en muchas situaciones en las que la modelización de problemas considera plantear un sistema de ecuaciones diferenciales con retorno. Para ello, se realizó la búsqueda basadas en las variables del estudio a través de una selección de información con criterio y rigor científico, que fueron obtenidas de bases de datos especializadas. La información fue seleccionada durante los meses de abril, mayo y junio del 2022, considerando dimensiones tales como métodos, áreas de aplicación y teoremas aplicados. La información seleccionada fue referenciada a través de las normas APA en 7ma versión y fueron filtradas, analizadas, contrastadas y sintetizadas por parte de los investigadores del estudio. Finalmente, a través de la discusión, se establecieron las conclusiones que permitieron establecer que las Ecuaciones diferenciales con retardo pueden ser aplicadas en un gran espectro de áreas y nos permiten predecir escenarios ajustados a la realidad; sin embargo, requieren métodos complejos para obtener soluciones a través de una aproximación numérica.

**Palabras Clave:** análisis; ecuaciones diferenciales; retardo; método; teorema.

## Abstract

The objective of the present investigation was to carry out a brief analysis of differential equations with delay, since they are applied in many situations in which the modeling of problems considers proposing a system of differential equations with return. For this, the search was carried out based on the study variables through a selection of information with scientific criteria and rigor, which were obtained from specialized databases. The information was selected during the months of April, May and June 2022, considering dimensions such as methods, areas of application and applied theorems. The selected information was referenced through the APA standards in the 7th version and was filtered, analyzed, contrasted and synthesized by the study researchers. Finally, through the discussion, the conclusions were established that allowed establishing that differential equations with delay can be applied in a wide spectrum of areas and allow us to predict scenarios adjusted to reality; however, they require complex methods to obtain solutions through numerical approximation.

**Keywords:** analysis; differential equations; time delay; method; theorem.

## Resumo

O objetivo da presente investigação foi realizar uma breve análise de equações diferenciais com atraso, uma vez que são aplicadas em muitas situações em que a modelagem de problemas considera propor um sistema de equações diferenciais com retorno. Para isso, a busca foi realizada com base nas variáveis do estudo por meio de uma seleção de informações com critério e rigor científico, as quais foram obtidas em bases de dados especializadas. As informações foram selecionadas durante os meses de abril, maio e junho de 2022, considerando dimensões como métodos, áreas de aplicação e teoremas aplicados. As informações selecionadas foram referenciadas por meio das normas da APA na 7ª versão e filtradas, analisadas, contrastadas e sintetizadas pelos pesquisadores do estudo. Por fim, através da discussão, foram estabelecidas as conclusões que permitiram estabelecer que equações diferenciais com atraso podem ser aplicadas em um amplo espectro de áreas e permitem prever cenários ajustados à realidade; entretanto, requerem métodos complexos para obter soluções por meio de aproximação numérica.

**Palavras-chave:** análise; equações diferenciais; atraso de tempo; método; teorema.

## Introducción

En la docencia universitaria, los docentes de matemáticas y física, deben motivar a sus estudiantes a través de alternativas, a fin de continuar mejorando su quehacer educativo, por lo que hallar modelos didácticos, es una constante a fin de permitir motivación en los estudiantes y lograr la adquisición de nuevas competencias, aprovechando todos y cada uno de los recursos que se disponen, e incidir en que la clase tenga una mejor aceptación y comprensión, sin importar su nivel de complejidad. Actualmente, el avance de las ecuaciones diferenciales es extenso, ya que se puede encontrar con una gran cantidad de problemas que han permitido una gran variedad de estudios en matemáticas puras; y se ha constituido en una importante herramienta para modelizar fenómenos de diversas índoles; donde se puede describir desde procesos meteorológicos hasta problemas relacionados con la aparición o desaparición de especies en competencia.

El origen de las Ecuaciones Diferenciales, lo encontramos en la formulación Newtoniana de algunos problemas físicos, en particular en la solución del problema gravitacional, sin olvidar que siempre ha estado ligada a los nombres de Newton y Leibnitz a las ecuaciones diferenciales. En el año 1671 Newton escribe en su libro de cálculo diferencial un método para resolver un problema de valor inicial mediante series construidas mediante un proceso iterativo; sin embargo, los trabajos

más significativos con respecto a la solución de ecuaciones diferenciales, se encuentran en los Principia mathematica, donde se presenta la ley de gravitación universal como una ecuación diferencial. Por otra parte, Leibnitz se inscribe en las ecuaciones diferenciales para tratar de resolver problemas geométricos sobre tangentes inversas. Para estudiar las ecuaciones diferenciales, se pueden clasificar en ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales parciales.

La ecuación diferencial funcional más simple y más natural, es la ecuación diferencial ordinaria con tiempo de retardo (Hutchinson, 1948), la cual puede ser usada para expresar alguna derivada de la función desconocida en el tiempo  $t$  en términos de la ocurrencia de la misma en instantes anteriores.

En diversos problemas físicos y biológicos, existen modelos que son descritos en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, la teoría de las ecuaciones diferenciales abarca también un campo muy importante que corresponde a las ecuaciones diferenciales con retardo (EDR) la cual se ocupa de modelos donde la variación de la variable de estado  $x$  con el tiempo depende en cada instante  $t$  no sólo de  $x(t)$  sino también de los valores de  $x$  en instantes anteriores. Avila et al. (2010) sostiene que existen muchas situaciones en las que la modelización de problemas de ciencias en general, donde se considera plantear uno o un sistema de ecuaciones diferenciales enmarcadas en diferentes esquemas y tipos de acuerdo con la estructura, el orden que pueden involucrar derivadas parciales o totales, que solo en ciertos casos se puede encontrar una solución analítica y en muchas ocasiones los modelos matemáticos involucran ecuaciones diferenciales para las que no se cuenta con soluciones analíticas. Por lo que se debe recurrir a otros métodos. Sin embargo, aplicar los métodos numéricos requiere de un análisis cuidadoso que garanticen que la aproximación a la solución buscada, ya que se puede incurrir en errores de medición de datos y de redondeo en los cálculos

Aceituno Muriel (2021) indica que los modelos utilizados para desarrollar la dinámica de poblaciones, suponen que los organismos reaccionan inmediatamente a la presencia de estímulos. Algunos ejemplos conocidos son los modelos de Verhulst, Schafer o Gordon. Pero basarse en esta respuesta inmediata de los organismos no es del todo correcto. Por ejemplo: los alimentos consumidos por los animales en la naturaleza no se recuperan de forma inmediata, sino que requerirán de un cierto tiempo para hacerlo. Por esta razón, muchos de los sucesos que ocurren en

la naturaleza son modelados mediante ecuaciones diferenciales con retardo.

## Metodología

El presente estudio, hace un breve análisis sobre las ecuaciones diferenciales con retardo. Para ello, se ha realizado una selección de estudios a través de una búsqueda en la que se consideró estudios en diferentes áreas de aplicación debido a su amplia cobertura de aplicación de la variable del estudio con información de primer y segundo nivel, las cuales fueron revisadas en bases de datos especializadas como Scopus, Redalyc, Scielo y Google Scholar. La revisión de la información fue realizada durante los meses abril, mayo y junio del año del 2022.

Los descriptores (palabras claves) de búsqueda que fueron utilizados, se basaron en las variables del tema de estudio, así ingeniería, economía, química, física, logística; mientras que sus las búsquedas fundamentales fueron cubiertas por las variables: como también las ciencias en las cuales pueden ser aplicadas; entre ellas tenemos: ecuaciones diferenciales con retardo aplicación, y se consideró como dimensiones de adicionales a los métodos, teoremas, lineales, no lineales y ordinarias.

Para la búsqueda en la minería de información se utilizó el siguiente orden metodológico:

- Identificación de variables en el contexto de estudio
- Análisis y filtrado de información, a fin de extraer la información pertinente al contexto del estudio planteado.
- Síntesis de información, a fin de ordenarla en base a las variables, para posterior continuar con la combinación de información relevante al estudio.
- Finalizada la búsqueda, se continuó con la selección, precisión, relevancia, utilidad, credibilidad y experiencia de los autores.
- Se seleccionó varios estudios enmarcados en los criterios de selección, para proseguir con la lectura crítica de los documentos.
- La información seleccionada, fue condicionada en base a sus evidencias concluyentes; así como por su adaptación a nuestro contexto de estudio.
- Las búsquedas fueron realizadas por los autores de la investigación.

Para realizar las referenciar bibliográficas, generación de la bibliografía, se utilizó un gestor bibliográfico denominado Mendeley aplicando las normas APA 7ma versión. Se evaluaron varias

tesis de pregrado, postgrado y artículos científicos, los mismos que cumplieron con los criterios de selección, para finalmente realizar el respectivo contraste de la información a través de la discusión.

## Discusión

Liz Marzán (2006) indica que la interpretación aproximada en fenómenos naturales ha introducido ciertos tipos de ecuaciones diferenciales en la variable temporal denominada como retardos, haciendo que dichas ecuaciones y sus soluciones tengan un comportamiento ajustados con la realidad, las mismas que requieren de métodos complejos para llegar a una solución a través de una aproximación numérica

Ruiz González et al. (2016) menciona que a la hora de estudiar los modelos de quimiostato, existe la posibilidad de considerar un retardo de tal forma que quede explicado el crecimiento oscilatorio de los microorganismos. En este aspecto los retardos son naturales en sistemas biológicos, ya que permiten la coexistencia de poblaciones en competición como solución periódica no forzada y se justifican debido a que el comportamiento de los sistemas dinámicos depende del presente y de su histórico.

Natalia & Bonilla (2016) mencionan que el uso de las ecuaciones diferenciales con retardo discreto, tiene un amplio campo de aplicación; por lo que no es posible encontrar de manera analítica una solución. Sostiene que se debe hacer uso de métodos numéricos y de recursos computacionales para realizar los respectivos cálculos, conociendo las limitaciones que impone en la estabilidad de dichas ecuaciones. Indica que el análisis aplicado a las soluciones para su descripción, debe ser similar a una ecuación diferencial ordinaria; sin embargo, la complejidad agregada por el retardo es considerable, pues debe considerarse soluciones en función de  $\tau$ , y estudiar productos de los parámetros con el retardo.

Lance (2021) concluye que las ecuaciones diferenciales con retardo, son sumamente interesante de explorar, ya que modelizan un modo más riguroso de muchas situaciones del mundo real, donde no se puede ignorar la existencia de retardos en la transferencia de información, pues pueden cambiar drásticamente su comportamiento en un sistema frente a la alternativa de no tener en cuenta la existencia dicho retardo que pueden tener un comportamiento oscilatorio en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Romero & Cruz (2017) en su investigación acerca de Estructurado por Sexo para el Estado Libre de Infección desarrollado mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y las

Ecuaciones Diferenciales con Retardo (EDR) aplicado a la Salud Pública del Perú, concluye que Matemáticamente, el Sistema EDO y el Sistema EDR, poseen la estabilidad local y la estabilidad absoluta para el punto libre de Infección, ya que ambos sistemas nos permite modelar la dinámica de transmisión de una enfermedad infecciosa (Susceptible-Infectado). El modelamiento en EDO nos permite conocer el comportamiento de cuando el contagio es inmediato; mientras que el modelamiento EDR nos permite conocer, cuando se considere el periodo latente adecuado.

(Pino Romero et al., 2019) en su investigación denominada Solución Uniformemente Acotada y Estabilidad Asintótica del Punto Libre de Infección de un Modelo Matemático SI con Dinámica Vital (crecimiento logístico) mediante las Ecuaciones Diferenciales con Retardo; concluye que el modelo matemático SI con dinámica vital mediante las EDR permiten analizar la interacción entre las poblaciones de susceptibles de infectados considerando el periodo de incubación que posee la enfermedad del VIH/SIDA, por lo cual el estado libre de infección debe situarse en la evolución de la enfermedad, obteniendo una mejor aproximación de la realidad sobre una enfermedad infecciosa.

(Mirian & Villafuerte, 2017) en su tesis denominada ECUACIÓN DE REACCIÓN-DIFUSIÓN EN DERIVADAS PARCIALES CON RETARDO Y APLICACIÓN DE LAS SERIES INFINITAS, encontró la solución para la ecuación de Reacción-Difusión con Retardo en forma de serie infinita dado por  $u(\tau; \xi) = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ ; dicha solución fue obtenida mediante método de Fourier, el cual permitió obtener soluciones exactas y de aproximaciones numéricas, es decir se obtuvo una herramienta para resolver problemas mixtos para ecuaciones en derivadas parciales con retardo y con coeficientes constantes.

(Avila et al., 2010) La ecuación de Hutchinson considera que los efectos en la población dependen de un tiempo anterior en lugar del tiempo presente  $t$ . Con el objeto de tener un modelo más realista debemos considerar que el retardo dependa de un promedio de todos los tiempos anteriores, y la ecuación que resulta entonces se le conoce como una ecuación con retardo distribuido o con retardo infinito.

(Garay Gonzales, 2020) en su tesis sobre un Modelo matemático depredador - presa utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo, concluye que el análisis de estabilidad lineal en ausencia de retardo, para la función monótona de crecimiento de la presa, el equilibrio de coexistencia es un centro, pero si la función de crecimiento de la presa es logística, entonces el equilibrio de coexistencia es localmente asintóticamente estable si  $\beta < \gamma k$  y no existe si  $\beta > \gamma k$ . Si

se muestra que  $\tau > 0$ , por lo que surge una solución periódica en el caso de la función de crecimiento monótona de la presa, ya que la bifurcación de Hopf ocurre sin ninguna condición. En el caso del crecimiento logístico de presas cuando  $\tau > 0$  la solución periódica es posible a través de la bifurcación de Hopf bajo ciertas condiciones.

Bel (2014) menciona que otro método que permite el estudio de soluciones oscilatorias en ecuaciones diferenciales con y sin retardo, es la metodología en frecuencia que generaliza los resultados existentes y permite a través de la teoría de singularidades describir distintos escenarios dinámicos relacionados con bifurcaciones de Hopf generalizadas.

(Trujillo Valencia, 2016) indica que en la aplicación del método de transformación diferencia a ecuaciones con retardo utilizando ejemplos elementales permitieron ilustrar y comparar su solución con la solución determinada por métodos analíticos, donde se visualizó el comportamiento de la convergencia de las soluciones. Posteriormente generaliza el método para aplicarlo a sistemas de ecuaciones diferenciales con retardo, lo que mostró nuevamente la rápida convergencia en comparación con su solución exacta.

(Itovich et al., 2019) en su estudio indican que las ecuaciones diferenciales con retardos pueden estudiarse a través de la aplicación de la metodología en el dominio frecuencia, mediante el teorema de bifurcación de Hopf Gráfico, a fin de obtener aproximaciones de las soluciones periódicas emergentes con fórmulas cerradas de diferentes órdenes de precisión. Analizándolas con una ecuación diferencial lineal con retardos y coeficientes periódicos. En su investigación han implementado dos metodologías: una basada en un método de colocación de polinomios de Chebyshev y otra mixta denominada de semidiscretización. El método con polinomios de Chebyshev le permitió avanzar en la determinación de bifurcaciones de ciclos en diferentes modelos; mientras que el método de semidiscretización le permitió abordar el problema de estabilidad en ecuaciones diferenciales lineales con varios retardos, independientes entre sí.

Leiva (2009) en su investigación indica que contó con las condiciones adecuadas garantizar la controlabilidad exacta de una Ecuación de Onda no lineal, cuyas condiciones de borde son de tipo Dirichlet y la no-linealidad está determinada a través de un término integral que incluye una expresión con retardo. Donde consideró una ecuación como un sistema abstracto, ordinario, no lineal de primer orden en un espacio de Hilbert, el cual fue convenientemente seleccionado.

Zacatenco et al. (2018) en su estudio, por primera vez lograron obtener diagramas de estabilidad en los planos paramétricos de la ecuación de Hill con retardo, sin la restricción de  $\omega = \tau$ . donde Se

representan diferentes comportamientos que van de la mano de una configuración del retardo y la excitación paramétrica. Su logro más relevante, fue la aparición de una región de estabilidad no observada en el caso sin retardo. Al utilizar el método de Walsh, les permitió caracterizar el retardo de una forma natural, simplificando y reduciendo el orden de la aproximación, compensando una menor velocidad de convergencia de las aproximaciones por funciones de Walsh con respecto a las aproximaciones por funciones de Fourier o polinomios de Chebyshev.

Franco (2013) a través de su tesis denominada Dinámica de Sistemas Ingenieriles con Retardos Temporales, sostiene que se ha desarrollado una extensión del método dado por el teorema gráfico de bifurcación de Hopf, lo que permitió el análisis de bifurcaciones locales en una amplia variedad de ecuaciones diferenciales funcionales retardadas. En su estudio mostró cómo el método Hopf, puede utilizarse para obtener aproximaciones de la amplitud y frecuencia de las oscilaciones que aparecen en EDFRs, tomando como ejemplos distintos modelos del oscilador de van der Pol con retardos. Además, para balances armónicos de alto orden indica que pueden utilizarse las mismas fórmulas que para sistemas EDOs, como las que se encuentran en (Moiola & Chen, 1996; Robbio et al., 2007).

Vicente Morocho & Panta Palacios (2019) en su tesis doctoral denominada PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA CONTROLAR LA PROPAGACIÓN DEL DENGUE EN LA CIUDAD DE PIURA, menciona que las EDR, tienen una amplia gama de posibilidades para su uso, pues se puede demostrar de manera realista al considerar intervalos de tiempo necesarios para que exista una interacción apropiada entre los diversos componentes del sistema objeto de estudio, por lo que, la propuesta con el modelo matemático basado en el método explícito de Runge-Kutta, concluyó que queda probada la consistencia más no su convergencia, pues todo método de Runge Kutta explícito de orden 4, para problemas no lineales no cumple con la estabilidad. Lo cual es un problema abierto para trabajos futuros.

Valencia et al. (2016) En su estudio presentan un modelo basado en ecuaciones diferenciales, que evalúa el efecto de variar la magnitud del retardo de información que afecta cooperación en un mecanismo de cooperación basado en confianza, para promover la adopción de tecnologías de consumo de electricidad eficientes donde se estudió un modelo de simulación en Dinámica de Sistemas para estudiar los efectos de los retardos en la promoción de la cooperación para reducir las emisiones de CO<sub>2</sub> mediante la adopción de tecnologías de consumo de energía eficientes. Las

simulaciones obtenidas sugieren que a mayor magnitud en el retardo de información menor es la acción colectiva alcanzada.

Jiménez-Calvillo & Campos-Cantón (2018) analizan el efecto de retardo de tiempo en una ecuación diferencial de primer orden, donde el tiempo de retardo junto la amplitud de la ecuación de primer orden, genera tres tipos de respuesta. En primer lugar, la clásica respuesta de una ecuación de primer de forma exponencial, para tiempos de retardo muy pequeños, una segunda respuesta, como una ecuación diferencial de segundo orden y finalmente una respuesta de un armónico oscilador. Con la ayuda de Matlab-Simulink, se implementó el retraso de tiempo, así como la simulación de la ecuación diferencial de primer orden a diferentes condiciones iniciales, donde los resultados experimentales obtenidos concuerdan con el análisis teórico que realizaron.

Albornoz et al. (2010) proponen un modelo enzimático discreto, el cual incluye tiempos de procesamiento y recuperación para considerar de forma simple los cambios conformacionales que ocurren durante el ciclo catalítico y sus efectos en la dinámica resultante. El modelo discreto concuerda con el modelo continuo con retardo, cuando se exponen a grandes números de moléculas; mientras que cuando es pequeño, el modelo discreto exhibe las discontinuidades asociadas a la naturaleza discreta de las reacciones a escalas microscópicas. El modelo discreto representa una herramienta de modelado y simulación, el cual evita la complejidad de la simulación estocástica, sin adolecer de las deficiencias de los modelos basados en ecuaciones diferenciales; esta característica es especialmente importante cuando se consideran sistemas biológicos que operan en volúmenes muy pequeños, como es el caso de las organelas.

## Conclusión

A través del breve análisis de las ecuaciones diferenciales, se pudo observar el uso de diferentes métodos a fin de comprobar análisis teóricos, establecidos por teoremas para de comprobar si las propuestas pueden en algunos casos comprobar o rechazar soluciones con comportamientos ajustados a la realidad que fueron establecidos a través de modelos matemáticos. Además, la variable de retardo implica un campo amplio de aplicación que es determinado por las dimensiones o criterios que pueden direccionar diferentes conclusiones los cuales pueden variar drásticamente en las ecuaciones diferenciales ordinarias; así también que requieren de métodos complejos para obtener soluciones a través de una aproximación numérica. Por otra parte, el estudio de la aplicación de las ecuaciones diferenciales con retorno, ha permitido obtener aproximaciones de la

realidad en el área de la salud pública, mediante la aplicación de soluciones con modelos que analizan las interacciones de una población con respecto a una afección.

## Referencias

1. Aceituno Muriel, A. (2021). Ecuaciones diferenciales con retardo [Valladolid]. <https://uvadoc.uva.es/handle/10324/50535>
2. Albornoz, J. M., Javier, F., & Vargas, A. (2010). Modelado de una reacción enzimática simple con retardo y discretización. *Memorias de La UDLA*.
3. Avila, E., Emilio, G., & Almeida, G. (2010). Estabilidad local de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y aplicaciones. *Miscelanea Matemática*, 51, 73–92.
4. Bel, A. L. (2014). Soluciones oscilatorias en ecuaciones diferenciales con retardo [Universidad Nacional del Sur]. <https://repositoriodigital.uns.edu.ar/handle/123456789/451>
5. Franco, S. G. (2013). Dinámica de Sistemas Ingenieriles con Retardos Temporales [UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR]. [https://repositoriodigital.uns.edu.ar/bitstream/handle/123456789/515/Tesis\\_Doctoral\\_Franco\\_Gentile.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositoriodigital.uns.edu.ar/bitstream/handle/123456789/515/Tesis_Doctoral_Franco_Gentile.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
6. Garay Gonzales, E. O. (2020). Modelo matemático depredador - presa utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo [UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO]. <https://repositorio.unprg.edu.pe/handle/20.500.12893/8798>
7. Hutchinson, G. E. (1948). Circular Causal Systems in Ecology, by George Evelyn Hutchinson. *Annals of the New York Academy of Sciences*. <http://people.wku.edu/charles.smith/biogeog/HUTC1948.htm>
8. Itovich, G. R., Gentile, F. S., & Moiola, J. L. (2019). RID-UNRN: Análisis de estabilidad de soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales con retardos y aplicaciones [Universidad Nacional de Río Negro]. <https://rid.unrn.edu.ar/handle/20.500.12049/6081>
9. Jiménez-Calvillo, I., & Campos-Cantón, I. (2018). Instrumentación de un Sistema con Retardo. In *Circuitos y Sistemas Multidisciplinar* (p. 224).
10. Lance, G. P. (2021). APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDO. *ECONSTOR*, 781. [www.cema.edu.ar/publicaciones/doc\\_trabajo.html](http://www.cema.edu.ar/publicaciones/doc_trabajo.html)

11. Leiva, V. (2009). Ciencia e Ingeniería Universidad de los Andes. Ciencia e Ingeniería, 30(2), 143–148. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=507550785007>
12. Liz Marzán, E. (2006). Sobre ecuaciones diferenciales con retraso, dinámica de poblaciones y números primos. MATerials MATem`atics, 17, 1–24. <https://ddd.uab.cat/record/97982>
13. Mirian, E., & Villafuerte, U. (2017). UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN Tesis presentada por la Bachiller.
14. Natalia, A., & Bonilla, R. (2016). ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDO DISCRETO. UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR.
15. Pino Romero, N., Salazar Fernandez, C. U., & Lopez Cruz, R. (2019). Solución Uniformemente Acotada y Estabilidad Asintótica del Punto Libre de Infección de un Modelo Matemático SI con Dinámica Vital (crecimiento logístico) mediante las Ecuaciones Diferenciales con Retardo - Dialnet. SELECCIONES MATEMATICAS, 6(1), 66–76. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7167051>
16. Romero, N. P., & Cruz, R. L. (2017). Teoremas de Estabilidad en un Modelo Matemático SI con Dinámica Vital Estructurado por Sexo para el Estado Libre de Infección desarrollado mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y las Ecuaciones Diferenciales con Retardo aplicado a la Salud Públ. Selecciones Matemáticas, 4(02), 202–210. <https://doi.org/10.17268/sel.mat.2017.02.07>
17. Ruiz González, A., Caraballo Garrido, T., & Langa Rosado, J. A. (2016). Ecuaciones diferenciales con retardo: Aplicación a un modelo de quimiostato.
18. Trujillo Valencia, J. F. (2016). Aproximación numérica de Ecuaciones diferenciales con retardo por el método de transformación diferencial aplicado a modelos biológicos. <https://repositorio.utp.edu.co/items/c445790c-1fa4-4966-9394-3da2bbaa8195>
19. Valencia, J. A. P., Ballesteros, E. P., & Dallos, A. R. L. (2016). Cooperación en la adopción de tecnologías de consumo de electricidad eficientes. INGE@UAN - TENDENCIAS EN LA INGENIERÍA, 6(11). <https://revistas.uan.edu.co/index.php/ingean/article/view/407>
20. Vicente Morocho, A. R., & Panta Palacios, R. (2019). Propuesta de un modelo matemático para controlar la propagación del dengue en la ciudad de Piura [UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA]. <https://repositorio.unp.edu.pe/handle/UNP/1618>
21. Zacatenco, U., Abraham, E., & Orduña, V. (2018). La Ecuación de Hill con Retardo. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

© 2022 por los autores. Este artículo es de acceso abierto y distribuido según los términos y condiciones de la licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).