



La incidencia del método de Pólya en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales a estudiantes de Segundo de Bachillerato

The incidence of the Pólya method in the teaching of systems of linear equations to high school students

A incidência do método Pólya no ensino de sistemas de equações lineares para alunos do ensino médio

Mercedes Leticia Lara-Freire ^I

leticia.lara@epoch.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-2589-1044>

Marco Antonio Lara-Freire ^{II}

antonio.lara@educacion.gob.ec

<https://orcid.org/0000-0001-9634-4913>

María Susana Ruíz-Herrera ^{III}

marias.ruiz@educacion.gob.ec

<https://orcid.org/0000-0001-8619-5301>

Susana Pilar Carpio-Mancero ^{IV}

susana.carpio@educacion.gob.ec

<https://orcid.org/0000-0003-1055-3082>

Correspondencia: leticia.lara@epoch.edu.ec

Ciencias de la Educación

Artículo de Investigación

***Recibido:** 27 de febrero de 2022 ***Aceptado:** 25 de marzo de 2022 * **Publicado:** 01 abril de 2022

- I. Magíster en Ciencias de la Educación Aprendizaje de la Matemática, Docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, ESPOCH, Riobamba, Ecuador.
- II. Máster Universitario en Didáctica de la Matemática en Educación Secundaria y Bachillerato, Docente de la Unidad Educativa Carlos Cisneros, Riobamba, Ecuador.
- III. Magíster en Educación Matemática, Docente de la Unidad Educativa Capitán Edmundo Chiriboga, Riobamba, Ecuador.
- IV. Magíster en Educación Matemática, Docente de la Unidad Educativa Carlos Cisneros, Riobamba, Ecuador.

Resumen

El objetivo del presente trabajo fue implementar una propuesta didáctica para aplicar el método de Pólya en la resolución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales, a través de cuatro actividades programadas; considerando que, la dificultad en la Matemática está relacionada con el proceso de adaptación de un estudiante a una determinada metodología de enseñanza y a la falta de comprensión de conceptos y procesos de cálculo y razonamiento. Por lo tanto, considerando que el aprendizaje debe estar basado en una actitud crítica y adquisición de habilidades mecánicas que respondan a la construcción de modelos mentales de recepción, memorización y dominio de conceptos, la propuesta presentada se enmarcó en la aplicación del procedimiento de Pólya. La presente investigación es de tipo aplicada, de observación participante y sistemática. En lo que respecta a los objetivos, el estudio fue correlacional con un enfoque explicativo. Y en lo que respecta al modo de investigar se trató de una investigación cuali-cuantitativa. Se aplicaron cuestionarios como instrumentos de recolección de datos; se analizaron e interpretaron los resultados del pre-test y post-test aplicados a la muestra, misma que estuvo compuesta por 40 estudiantes de Segundo Año de Bachillerato. Se concluye que existió mejora en el rendimiento académico de los estudiantes y que la implementación del método de Pólya permitió que los estudiantes desarrollen habilidades lingüísticas y crítico-reflexivas.

Palabras claves: Hábitos; rendimiento académico; resolución de problemas; reflexión; comprensión.

Abstract

The objective of this study was to implement a didactic proposal to apply the Pólya's method in solving problems of systems of linear equations, through four programmed activities; considering that, the difficulty in Mathematics is related to the process of adaptation of a student to a certain teaching methodology and to the lack of understanding of concepts, calculation, and reasoning processes. Therefore, considering that learning must be based on a critical attitude and the acquisition of mechanical skills that respond to the construction of mental models of reception, memorization and mastery of concepts; the presented proposal was framed in the application of the Pólya procedure. This research was applied, the observation was participant and systematic. Regarding the objectives, the study was correlational with an explanatory approach. The research mode was qualitative-quantitative. Questionnaires were applied as data collection instruments. The

results of the pre-test and post-test applied to the sample (40 students belonging to the Second Year of Basic Superior Level) were analyzed and interpreted. It was concluded that there was improvement in the academic performance of the students and that the implementation of the Pólya's method helped students to develop linguistic and critical-reflective skills.

Keywords: Habits; academic performance; problem solving; reflection; understanding.

Resumo

O objetivo do presente trabalho foi implementar uma proposta didática de aplicação do método Pólya na resolução de problemas de sistemas de equações lineares, através de quatro atividades programadas; considerando que a dificuldade em Matemática está relacionada ao processo de adaptação de um aluno a uma determinada metodologia de ensino e à falta de compreensão de conceitos e processos de cálculo e raciocínio. Assim, considerando que a aprendizagem deve basear-se numa atitude crítica e aquisição de competências mecânicas que respondam à construção de modelos mentais de recepção, memorização e domínio de conceitos, a proposta apresentada enquadra-se na aplicação do procedimento de Pólya. A presente investigação é do tipo aplicado, de observação participante e sistemática. Quanto aos objetivos, o estudo foi correlacional com abordagem explicativa. E no que diz respeito à forma de investigar, foi uma investigação qualitativo-quantitativa. Questionários foram aplicados como instrumentos de coleta de dados; os resultados do pré-teste e pós-teste aplicados à amostra, composta por 40 alunos do segundo ano do ensino médio, foram analisados e interpretados. Conclui-se que houve melhora no desempenho acadêmico dos alunos e que a implementação do método Pólya permitiu que os alunos desenvolvessem habilidades linguísticas e crítico-reflexivas.

Palavras-chave: Hábitos; rendimento acadêmico; resolução de problemas; reflexão; compreensão.

Introducción

El aprendizaje de la Matemática es un proceso complejo y que se encuentra expuesto a una serie de factores que dificultan su comprensión; más aún cuando no se ha cumplido con los objetivos de enseñanza aprendizaje, es decir no existen los conocimientos previos suficientes para relacionar contenidos fundamentales con nuevos contenidos o para relacionar la aritmética con procesos algebraicos (Ahmed, 2011).

En el contexto educativo ecuatoriano, una de las asignaturas de mayor porcentaje de reprobación es matemática ya que el desarrollo de esta asignatura ha traído como consecuencias muchas falencias de aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes a todo nivel académico. Los estudiantes son capaces de resolver operaciones básicas fundamentales, pero a la hora de aplicarlas para la solución de una operación no saben cómo hacerla ya que aprendieron de una forma mecánica y repetitiva (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2018).

El rendimiento académico en nuestro país es muy preocupante, ya que durante el proceso de aprendizaje los estudiantes no logran cumplir con los objetivos de aprendizaje y más aún cuando no desarrollan las capacidades matemáticas, ya que la forma tradicional de enseñanza no ha despertado el interés del estudiante y más bien las han encontrado inútiles, aburridas y complicadas de asimilar.

Frente a esta problemática, a este paradigma poco alentador con relación a la matemática; los estudios y planteamientos de nuevas intervenciones didácticas donde se pongan de manifiesto, la lúdica, la motivación, el gusto por aprender, la empatía por la matemática y los que la imparten se vuelve un requisito fundamental (Llanderas, 2012).

Guskey (2013) afirma que el rendimiento académico del estudiante es un constructo multifacético, el cual está relacionado con diferentes dominios de aprendizaje, que se mide formas distintas y con diferentes propósitos (p.125).

La otra parte esencial radica en la interrogante de ¿cómo se pueden resolver problemas de la vida si no se pueden resolver problemas de Matemática?

La escuela es una práctica previa para llevar al estudiante al éxito futuro como profesional y como ser humano. Los valores, las costumbres, los hábitos son importantes, pero también lo es el desarrollo de la capacidad para resolver problemas abstractos y luego concretos en la medida que estén relacionados con su entorno y su diario convivir (Bravo, 2016).

Es así, que debemos considerar que toda propuesta encaminada a mejorar dicha problemática es valedera y aplicativa. En este trabajo de investigación la propuesta pretende demostrar que el uso del método de Pólya puede aportar a la creación de algoritmos y estructuras mentales significativas y funcionales; además, una metodología necesita ser complementada con herramientas didácticas como un software Matemático a fin de fomentar la aplicación de las nuevas tecnologías de la información y comunicación (Cuicas, 2007).

El método de Pólya es un método sencillo, fácil de ponerlo en práctica; pero a la vez es reflexivo, fomenta el pensamiento lógico, la creación de algoritmos planificados y el aprendizaje cooperativo. En este estudio se plantea la necesidad de contribuir al perfeccionamiento del proceso de aprendizaje de la Matemática, ciencia que posee un lenguaje universal, que sirve para entender todo lo que nos rodea. Aportar al entendimiento del álgebra y específicamente del tema de sistemas de ecuaciones lineales mediante la utilización del método de Pólya, a través del planteamiento de actividades que proponen un trabajo colaborativo entre estudiantes con la supervisión del docente. Este método se pondrá en práctica generar una propuesta activa y participativa como una alternativa de aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales en el Segundo de bachillerato, además para lograr una visión global y alcanzar un aprendizaje integral, es necesario el uso de la tecnología, la herramienta más actual e idónea para educar a la juventud de esta época, por eso se usarán diversos softwares educativos como: GeoGebra, Excel o Photomath (López, 2014).

Este nuevo método de resolución de problemas propone que el estudiante debe estar expuesto a diversos contextos educativos con la finalidad de crear y resolver problemas. El método Pólya es una estrategia y herramienta novedosa la cual será de mucha utilidad para la creación de algoritmos y estructuras mentales y funcionales; creando a la vez un potencial académico en los estudiantes y estamos seguros que con su aplicación mejorará su rendimiento en los estudiantes y facilitarán la tarea de ellos maestros en la construcción del aprendizaje. Justificando de esta manera como aporte pedagógico la incidencia del método Pólya en aprendizaje de ecuaciones lineales en los estudiantes de Segundo de bachillerato.

También se considerara en este trabajo de investigación el método cooperativo con el ánimo de generar de una manera grupal y lúdica la aplicación coherente del procedimiento de Pólya, para que los estudiantes aporten con sus ideas en la puesta en marcha de los cuatro pasos propuestos por Pólya y dar solución a problemas contextualizados de sistemas de ecuaciones lineales; además, trabajarán en forma conjunta con la finalidad de programar softwares educativos, entender, analizar y comprobar resultados.

Considerando también que las características de esta investigación que se llevaron a cabo estaban enfocadas en la investigación cuantitativa, la misma que permite el desarrollo y comprensión de problemas.

Revisión Literaria

Aprendizaje y Matemática

El aprendizaje se define como el cambio de comportamiento, hábitos, formas de pensar y actuar, mediante la adquisición e interiorización de conocimientos y experiencias provenientes del entorno o de otras personas.

El aprendizaje tiene sentido y es funcional cuando se puede aplicar en la comprensión y solución de problemas de nuestro alrededor (Pérez, 2011).

El aprendizaje debe estar basado en una actitud crítica que fomente la profundización e investigación activa para aceptar el conocimiento como una verdad; el aprendizaje debe ser multidisciplinario para relacionar diferentes áreas, lenguajes, símbolos, acciones, objetos y valorar los contenidos como significativos, útiles y aplicables; además, aprender presupone tener cierto nivel de experticia en determinadas áreas o temas de estudio, ser hábil en conectar con otros individuos y fomentar relaciones de aprendizaje cooperativo (Wong, 2015).

El aprendizaje posee cierto grado de intuición, que se materializa con el descubrimiento, la experiencia y la práctica; sin embargo, las situaciones de aprendizaje deben ser organizadas, secuenciales, puesto que inicialmente resolverán problemas simples para luego pasar a la solución de cuestiones más complejas que se adapten a diversos contextos, generando de esta forma modelos y generalizaciones (Sarmiento, 2007).

Los factores que influyen en el aprendizaje de la Matemática como lo indica Ramírez (2016) son los siguientes:

- El grado de desarrollo de la inteligencia lógico matemática
- La empatía generada entre docente y estudiante
- La creación de un ambiente agradable de aprendizaje
- La metodología usada por el docente
- Los recursos y materiales didácticos disponibles
- Los hábitos de estudio adecuados
- La motivación intrínseca.

El aprendizaje de matemática pretende poner de manifiesto un enfoque cognitivo basado en la adquisición de habilidades mecánicas que responden a la construcción de modelos mentales de repetición y memorización y el dominio de conceptos que aportan a la comprensión, a la

organización de significados, que potencian la coherencia lógica de fases que llevan a la resolución efectiva de problemas (Sánchez, 2003).

Aprendizaje Cooperativo

El aprendizaje cooperativo está constituido por diversas estrategias sistematizadas que están fundamentadas en dos características esenciales: la primera la división de estudiantes en pequeños equipos heterogéneos de trabajo que deben ser representativos de la población total del aula y la segunda la instauración de estructuras de interdependencia positiva, para generar vínculos y conocimientos; mediante la dosificación, control y evaluación de actividades, tareas, proyectos, aplicación de metodologías que han de tener una estímulo específico (Gavilán, 2016).

Johnson y Johnson, (1993), mencionan que las actividades dentro del método cooperativo deben ser planeadas, es decir, se debe explicar con claridad la extensión del trabajo, la responsabilidad y el rol de cada miembro del equipo, la metodología a utilizarse, los resultados que pretende alcanzar y los parámetros de evaluación de los logros en forma individual y grupal (David Johnson, 1999).

Aprendizaje Cooperativo y Matemática

De acuerdo al criterio de Marchesi, Coll, y Palacios (1991), se pueden evidenciar a ciencia cierta que los resultados del método cooperativo son muy productivos y positivos, los cuales se magnifican usando la asignatura que se trabaja es compleja y novedosa como es el caso de la Matemática. Es muy común que la metodología matemática se aplique pensando en un trabajo individual, dejando de lado las relaciones interpersonales entre los estudiantes, regidos por los parámetros establecidos por el docente. Esto es un error grave ya que dichas relaciones fomentan la confianza, el autoaprendizaje, el trabajo en equipo, involucrarse en las dudas que poseen los estudiantes que salen a la luz únicamente cuando se trabaja grupalmente. Dotar a los estudiantes el rol protagónico del aprendizaje, donde el docente se convierte en un guía, un mediador, un gestor de recursos y materiales, está es una característica esencial del modelo cooperativo. Además, para poner en marcha los preceptos, obtener las ventajas y beneficios del modelo cooperativo es necesario la profesionalización y actualización permanente del docente, mejorar sus capacidades y habilidades para manejar adecuadamente a los equipos (Gutiérrez, 2009).

Definición de Problema

Un problema es una situación de la realidad que necesita ser resuelta, una circunstancia para la cual no hay una solución determinada. Un problema existe siempre y cuando genere un conflicto en la mente del sujeto del conocimiento para percibir al objeto de su entorno. La solución a un problema

merece un análisis profundo, genera un proceso de investigación, es uso de un algoritmo y una retrospectiva acerca de su solución. Lo que para una persona es un problema, a lo mejor para otra no lo es (Sevilla, 2017).

Estrategias y Sugerencias para resolver Problemas

Plantear un problema Matemático debe implicar un reto, una situación motivadora, además el problema planteado debe utilizar elementos del entorno que sean cercanos y conocidos para el estudiante, el problema debe ayudarle a comprender la realidad que lo rodea y tener aplicación práctica.

Alfaro (2006) señala en su artículo denominado Las ideas de Pólya en la resolución de problemas, que para resolver un problema implica un proceso de descubrimiento, el problema puede ser sencillo, pero debe estar dirigido a despertar la curiosidad y poner en práctica todas las capacidades del estudiante para desarrollar en él competencias de diversa índole. El disipar un problema también tiene implícito un alto grado de motivación que se experimenta por el triunfo que implica solucionarlo (Alfaro, 2006)

Por otra parte, Rodríguez (2003) manifiesta que los procesos de pensamiento divergente involucran la concepción de una amplia gama de enfoques, paradigmas y perspectivas y enfoques alternativos de solución poniendo en juego la inspiración, originalidad, creatividad (Rodríguez, 2003).

Definición del método de Pólya

El gran matemático George Pólya, nació en Budapest en el año de 1887 y falleció en 1985 el Palo Alto California. Durante su proceso educativo siempre le llamó la atención el descubrir un proceso innovador para explicar cómo se derivan los resultados matemáticos. Pólya aseveraba que, para poder comprender una teoría, era imprescindible conocer primero cómo fue descubierta, por tal razón su método de enseñanza estaba cimentado en el descubrimiento.

Pólya se considera un pionero en cuanto a proponer un método aplicado a la resolución de problemas, una secuencia de pasos que además se puede aplicar a cualquier campo de la vida cotidiana (Alfaro, Las ideas de Pólya en la resolución de problemas, 2006).

Método de Pólya

Consiste en los siguientes pasos:

- **Comprender el Enunciado del problema:** Radica en tomar un contenido o un problema y descomponerlo en sus partes constitutivas. Luego discriminarlas y encontrar relaciones entre unas y otras, siempre con un objetivo bien definido.

- **Proponer un plan:** Se debe estructurar un plan para resolver un problema matemático o de tu vida, ya que planear permite ahorrar tiempo y esfuerzo.
- **Ejecutar el plan:** Consiste en interpretar la información proporcionada en el problema y aplicar el procedimiento más idóneo para resolverlo en función de la situación propuesta.
- **Verificar la solución:** En esta fase es preciso comprobar si la solución encontrada es la correcta, si se ajusta a los requerimientos del enunciado del problema y si se adapta al contexto de la situación modelada (Sobarzo, 2017).

Sistema de Ecuaciones Lineales

Cuando escuchamos la palabra sistema nos hacemos una imagen mental de una reunión de elementos. De hecho, si tomamos como referencia el sistema óseo pues tenemos muy claro que es el conjunto de los 206 huesos que lo conforma, donde cada uno es importante y cumple una función dentro del sistema. Entonces está claro que si nos referimos a un sistema de ecuaciones pues se tratará de un conjunto de ecuaciones donde cada una es importante y cumple una función determinada, además las ecuaciones están interrelacionadas (González, 2013).

Definición de sistema de Ecuación Lineal

Es una estructura organizada de dos o más ecuaciones de primer grado o lineales, ya que su gráfica es una línea recta, el objetivo de la ecuación es hallar el valor de las incógnitas que satisfacen las condiciones del problema y hacen que tanto la expresión como la solución sean válidas. Gráficamente la solución lo constituyen la cantidad de puntos de corte de las rectas.

Por ejemplo:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 11x - 4y = 7 \end{cases}$$

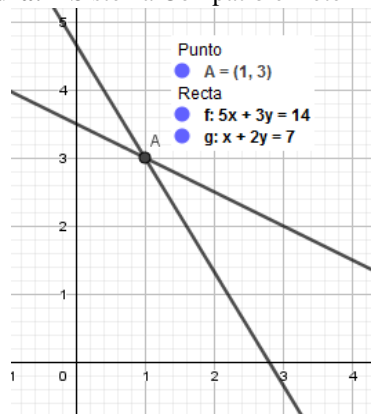
Donde la solución es única y corresponde al punto de intersección de coordenadas (1,1).

Tipos de Soluciones de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Si se analiza el carácter de las de solución de un sistema de ecuaciones lineales y se la contrasta con la interpretación gráfica, podemos diferenciar tres tipos.

1. **Sistema Compatible determinado:** Es aquel sistema de ecuaciones lineales que tiene una única solución. Las rectas tienen distinta pendiente. En este tipo de sistemas de ecuaciones se puede visualizar en la gráfica de las funciones lineales que se cortan en un solo punto el cual corresponde a la solución, tal como se muestra en el siguiente esquema.

Figura: 1 Sistema Compatible Determinado

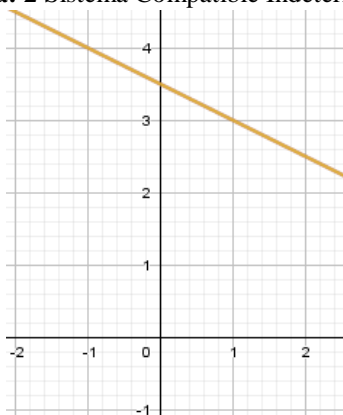


Fuente: Elaboración propia en GeoGebra
Autor: Investigadores

En el gráfico se observa que el punto de intersección de las rectas corresponde a la solución del sistema y es el punto (1,3).

- 2. Sistema Compatible indeterminado:** se denomina de esta manera al sistema de ecuaciones que tiene soluciones infinitas (Aznar, 2017). Gráficamente el resultado serán dos rectas paralelas y coincidentes, la gráfica se muestra a continuación. Las rectas tienen la misma pendiente e igual ordenada en el origen

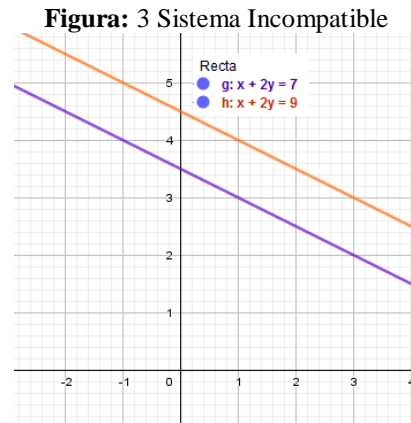
Figura: 2 Sistema Compatible Indeterminado



Fuente: Elaboración propia en GeoGebra
Autor: Investigadores

Como existen infinitos puntos de coincidencia se infiere que existen infinitas soluciones.

3. Sistema Incompatible: es aquel sistema que carece de soluciones su gráfica son dos rectas paralelas y distintas. Las rectas tienen la misma pendiente y distinta ordenada en el origen



Fuente: Elaboración propia en GeoGebra
Autor: Investigadores

Como se observa en la figura no existen puntos de coincidencia, la intersección de rectas paralelas es el conjunto vacío, por tanto, no existe solución del sistema.

Métodos para Resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales

Los principales métodos para resolver sistemas de ecuaciones se enlistan a continuación:

- Método de adición y sustracción
- Método de igualación
- Método de sustitución
- Método gráfico
- Método de Gauss
- Regla de Cramer

Objetivos

Objetivo General

- Determinar la incidencia del método Pólya en la enseñanza de sistemas de ecuaciones.

Objetivos específicos

- Identificar el impacto del método de Pólya en la motivación de los estudiantes en el aprendizaje de ecuaciones lineales.
- Analizar los efectos del método de Pólya en el rendimiento académico de los estudiantes de Segundo de Bachillerato.
- Evaluar los niveles de aceptación del método de Pólya en el proceso de enseñanza de ecuaciones lineales.

Metodología

En lo que corresponde a la aplicación, la presente corresponde a un tipo de investigación aplicada, puesto que existe intervención del investigador. En lo que respecta al objetivo es una investigación correlacional pues se analiza la relación que existe entre las variables en este caso el método de Pólya y la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales. Desde el punto de vista del modelo de investigación, el presente estudio responde a un estudio cuantitativo, pues se aplica una prueba de inicio y una prueba al final.

Se trata también de una observación participante, pues existe interacción entre el sujeto y el objeto de estudio, que en este caso obedece a 40 estudiantes (12 mujeres y 28 hombres) de la figura de Ciencias de Segundo de Bachillerato de la Unidad Educativa “Carlos Cisneros,” ubicada en la ciudad de Riobamba-Ecuador. Los mencionados estudiantes recibían 4 horas de 45 minutos de clase de la asignatura de matemática.

Por otro lado, la observación es de tipo sistemática, pues se inicia con la identificación del problema; luego, se establecen las variables; después se elabora la pregunta o preguntas de investigación; seguidamente, el investigador plantea hipótesis. Una vez identificados los elementos fundamentales de la investigación, el investigador elabora y aplica los instrumentos de medición de datos; se analizan los resultados de los mismos, para finalmente redactar las conclusiones y recomendaciones del estudio.

Así mismo, se aplica observación de campo pues los datos son recabados directamente del sujeto de estudio. La propuesta presentada por el investigador constó de cuatro actividades, inicialmente enfocadas a la enseñanza de la noción de la recta y sistemas de ecuaciones lineales; para luego, dirigir las a la solución de problemas con la aplicación del método de Pólya. Con la finalidad de

medir el cumplimiento de los pasos del método aplicado se elaboró un formato de quince indicadores (cuestionario).

La incidencia del método de Pólya en el rendimiento académico de los 40 estudiantes de Segundo de Bachillerato se midió en base a los resultados de la actividad cuatro.

Toda la información recabada durante la intervención permitió conocer las dificultades que presentan los estudiantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales y analizar la efectividad de la metodología propuesta.

En referente a la propuesta, se consideró una metodología participativa basada en los procesos del método de Pólya, mismo que comprende cuatro pasos que forman un algoritmo secuencial.

Resultados

Como se menciona en la metodología, esta investigación se fundamenta en la aplicación del método de Pólya para la resolución de problemas matemáticos relacionados con sistemas de ecuaciones lineales.

Con la finalidad de conocer la efectividad del mencionado se aplicó un pre-test y un post-test. Los resultados de estos instrumentos se detallan a continuación.

Tabla 1. Prueba de diagnóstico (pre-test)

Asignatura:	Matemática	Fecha:	2018-10-23
Curso:	SEGUNDO	Paralelo:	"A"
Especialización	CIENCIAS	Tema:	Sistemas de ecuaciones Lineales
Docente:	Lic. Marco Lara	NÚMERO DE ESTUDIANTES	40
NOMBRES Y APELLIDOS DEL ESTUDIANTE:			METODOLOGÍA Método de Pólya

Instrucciones

- Dispones de 40 minutos para resolver el siguiente problema.
- Para llegar a la respuesta debes seguir los pasos que se anotan en cada casillero.

Desarrolla el siguiente problema referente a sistemas de ecuaciones

Sobre la mesa de tu profesor se encuentran una cierta cantidad de lápices de colores pastel y otros lápices multicolores. Si se conoce que el doble de los lápices de colores pastel más el triple de los lápices multicolores suman 17, además se conoce que la diferencia entre la cantidad de lápices de

colores pastel y lápices multicolores es igual a 1. Determina la cantidad total de lápices que posee el docente.

PASOS		Opciones	
PASO 1: COMPRENDER EL ENUNCIADO DEL PROBLEMA			
(Espacio para anotaciones de los indicadores planteados)	INDICADORES	SI	NO
	¿El problema hay que leerlo varias veces?	27	13
	¿El enunciado del problema es comprensible?	11	29
	¿Puedes identificar las incógnitas del problema?	12	28
	¿Los datos del problema son suficientes?	15	25
	¿Eres capaz de plantear el problema con tus propias palabras?	9	31
PASO 2: PROPONER UN PLAN			
(Espacio para anotaciones de los indicadores planteados)	INDICADORES	SI	NO
	¿Identificas de forma clara las operaciones y procedimientos que debes usar para resolver el problema?	12	28
	¿Puedes descomponer el problema en problemas más sencillos?	10	30
	¿Conoces los posibles métodos para resolver el sistema de ecuaciones planteado?	12	28
	¿Eres capaz de jerarquizar cada paso a seguir desde el inicio hasta el fin de la solución del problema?	11	29
PASO 3: EJECUTAR EL PLAN			
(Espacio para anotaciones de los indicadores planteados)	INDICADORES	SI	NO
	¿Pones en práctica diversas alternativas de solución al problema?	12	28
	¿Los pasos que sigues para resolver un problema son secuenciales, lógicos y verificables?	13	27
PASO 4: VERIFICAR LA SOLUCIÓN			
(Espacio para anotaciones de los indicadores planteados)	INDICADORES	SI	NO
	¿Revisas si los resultados concuerdan con lo que solicitaba el enunciado del problema?	12	28
	¿Buscas nuevas maneras de resolver el problema?	15	25
	¿El procedimiento que usaste es válido para problemas similares?	11	29
	¿El software matemático coadyuva al proceso de verificación de resultados?	25	15

Fuente: Pre-test
Autor: Investigadores

Tabla 2. Prueba final (Post-test)

Asignatura:	Matemática	Fecha:	2019-01-02
Curso:	SEGUNDO	Paralelo:	“A”
Especialización	CIENCIAS	Tema:	Sistemas de ecuaciones Lineales
Docente:	Lic. Marco Lara	FIRMA DEL ESTUDIANTE	
NOMBRES Y APELLIDOS DEL ESTUDIANTE:			METODOLOGÍA Método de Pólya

Instrucciones

- Dispones de 40 minutos para resolver el siguiente problema
- Para llegar a la respuesta debes seguir los pasos que se anotan en cada casillero

Desarrolla el siguiente problema referente a sistemas de ecuaciones

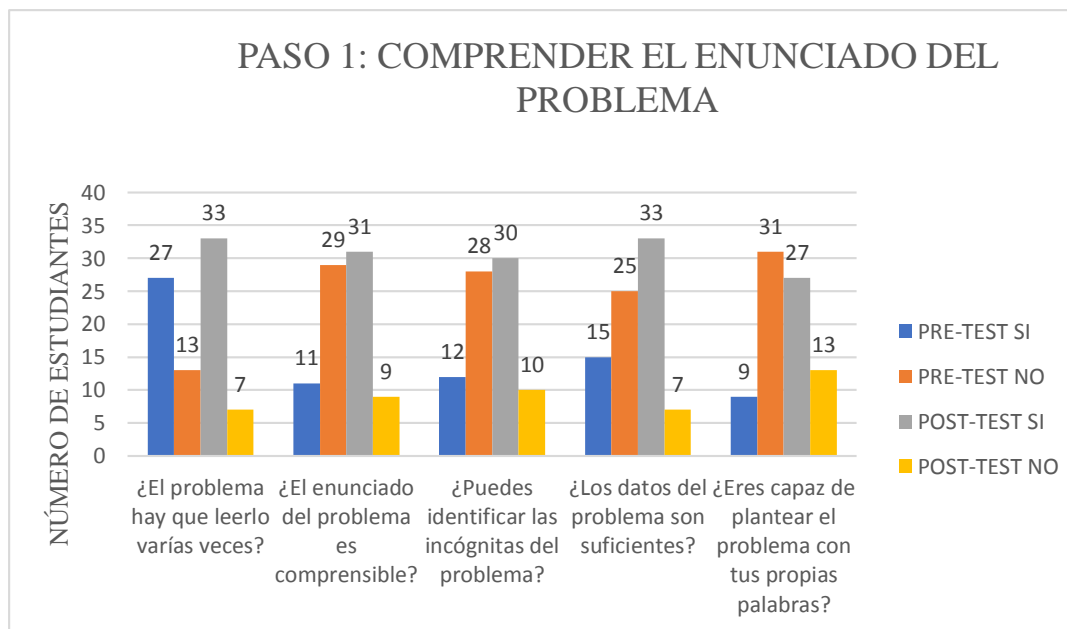
Sobre la mesa de tu profesor se encuentran una cierta cantidad de lápices de colores pastel y otros lápices multicolores. Si se conoce que el quíntuplo de los lápices de colores pastel menos el triple de los lápices multicolores es igual a 26, además se conoce que la suma entre la cantidad de lápices de colores pastel y lápices multicolores es igual a 10. Determina la cantidad total de lápices que posee el docente.

PASOS		Opciones	
PASO 1: COMPRENDER EL ENUNCIADO DEL PROBLEMA			
(Espacio para anotaciones de los indicadores planteados)	INDICADORES	SI	NO
	¿El problema hay que leerlo varias veces?	33	7
	¿El enunciado del problema es comprensible?	31	9
	¿Puedes identificar las incógnitas del problema?	30	10
	¿Los datos del problema son suficientes?	33	7
	¿Eres capaz de plantear el problema con tus propias palabras?	27	13
PASO 2: PROPONER UN PLAN			
(Espacio para anotaciones de los indicadores planteados)	INDICADORES	SI	NO
	¿Identificas de forma clara las operaciones y procedimientos que debes usar para resolver el problema?	34	6
	¿Puedes descomponer el problema en problemas más sencillos?	28	12

	¿Conoces los posibles métodos para resolver el sistema de ecuaciones planteado?	35	5
	¿Eres capaz de jerarquizar cada paso a seguir desde el inicio hasta el fin de la solución del problema?	30	10
PASO 3: EJECUTAR EL PLAN			
(Espacio para anotaciones de los indicadores planteados)	INDICADORES	SI	NO
	¿Pones en práctica diversas alternativas de solución al problema?	29	11
	¿Los pasos que sigues para resolver un problema son secuenciales, lógicos y verificables?	30	10
PASO 4: VERIFICAR LA SOLUCIÓN			
(Espacio para anotaciones de los indicadores planteados)	INDICADORES	SI	NO
	¿Revisas si los resultados concuerdan con lo que solicitaba el enunciado del problema?	36	4
	¿Buscas nuevas maneras de resolver el problema?	27	13
	¿El procedimiento que usaste es válido para problemas similares?	31	9
	¿El software matemático coadyuva al proceso de verificación de resultados?	40	0

Fuente: Post-test
Autor: Investigadores

Gráfico 1. Resultados comparativos entre el pre-test y post-test del paso 1 del método de Pólya



Fuente: Pre-test y post-test
Autor: Investigadores

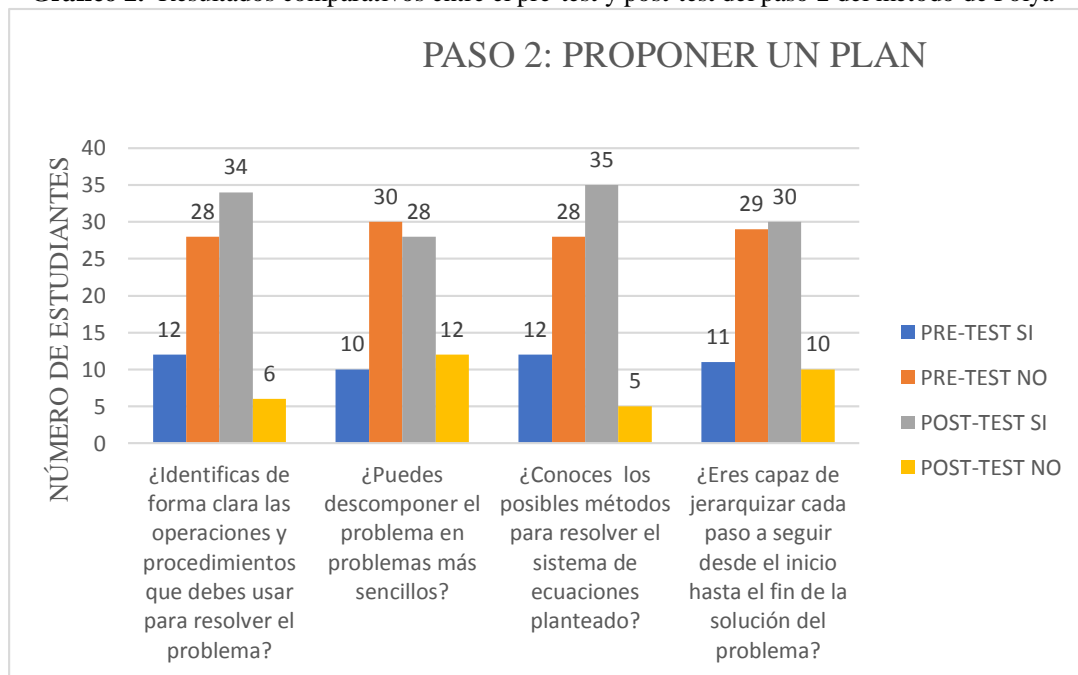
Análisis e interpretación. - Como se muestra en la gráfica, la respuesta SI del indicador que se refiere a la lectura repetitiva del enunciado del problema aumenta de 27 en el pre-test a 33 en el post-test; lo que evidencia la importancia de que los estudiantes realicen una lectura comprensiva y crítica del problema para primero entenderlo y luego poder resolverlo.

En cuanto a si es comprensible el enunciado, se puede observar que en el pre-test solamente 11 estudiantes entendían el enunciado; sin embargo, luego de implementar la metodología propuesta, el número de estudiantes que captan el enunciado del problema aumenta a 31, lo cual también se debe al mejoramiento de la competencia de comunicación lingüística.

El indicador de identificación de incógnitas muestra una mejora considerable; lo que comprueba que las actividades que se desarrollaron con el método Pólya potencian la competencia matemática. Como consecuencia de lo anterior también se puede notar que el indicador que tiene que ver con poseer los datos suficientes en el problema tiene un gran ascenso.

Finalmente, se percibe el progreso de los estudiantes en el manejo de las competencias matemática y lingüística; lo que se evidencia con la capacidad de los estudiantes para plantear un problema con sus propias palabras, esto corresponde al último indicador del Paso 1.

Gráfico 2. Resultados comparativos entre el pre-test y post-test del paso 2 del método de Pólya



Fuente: Pre-test y Post-test

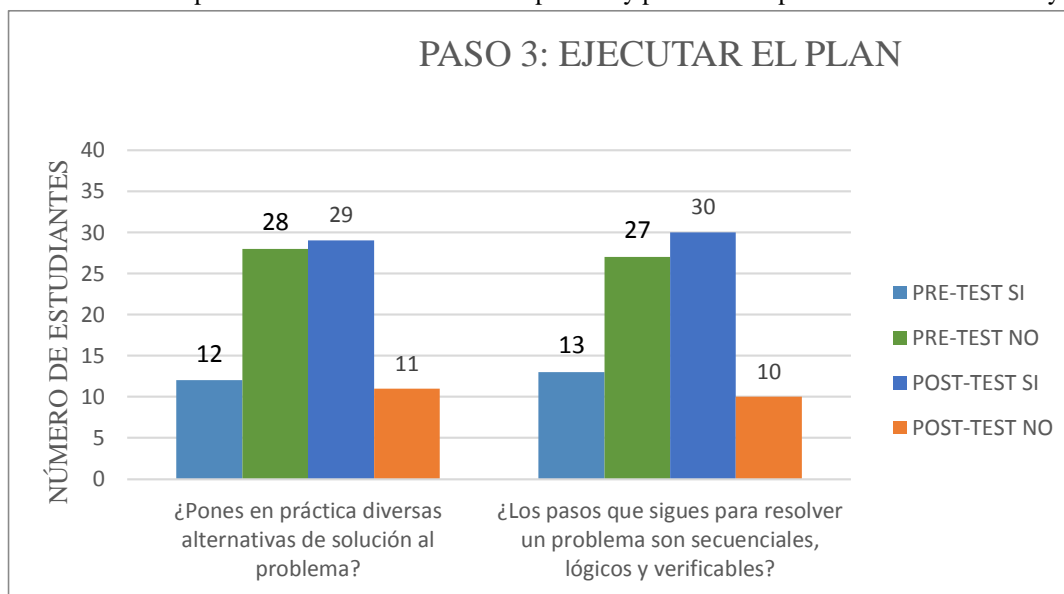
Autor: Investigadores

Análisis e interpretación. - en la figura 2 se refleja la habilidad de los estudiantes para identificar operaciones y procesos, antes de resolver el problema.

El estudiante desarrolla el pensamiento deductivo-inductivo como lo muestra el indicador “descomposición del problema es sus partes;” donde se observa que en el pre-test 10 estudiantes desarrollaron esta habilidad mientras que en el pre-test el número se incrementa a 28.

Además de conocer el Modelo de Pólya, se muestra el alto conocimiento adquirido por los estudiantes en lo que respecta a la gama de métodos existentes para resolver problemas y los pasos ya jerarquizados que deben seguirse para aplicarlos, la propuesta metodológica ha mejorado esos indicadores como se nota en la figura 2.

Gráfico 3. Comparativo de indicadores entre el pre-test y post-test del paso 3 del método de Pólya



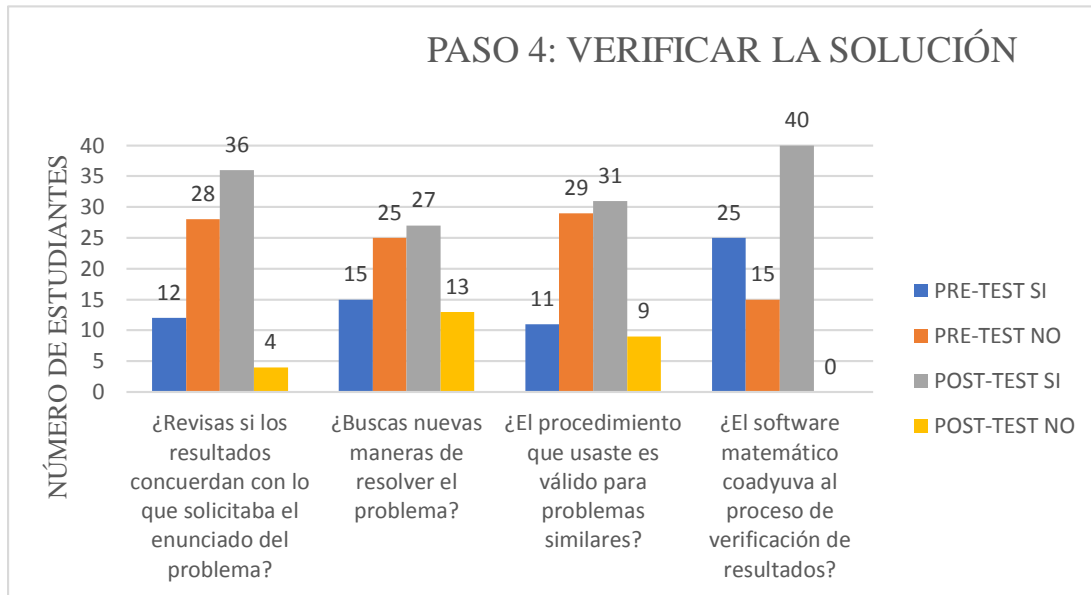
Fuente: Pre-test y Post-test

Autor: Investigadores

Análisis e interpretación. - Una vez conocidos los métodos, los procesos, y su secuenciación; el estudiante está en la capacidad de valerse de ellos como se evidencia ante la interrogante de si pone en práctica diversas alternativas; ya que, se nota un incremento en la respuesta afirmativa de 12 a 29 estudiantes.

El incremento de 13 a 30 estudiantes que siguen pasos secuenciales, lógicos y verificables como se muestra en la tabla 3 es una nueva realidad del éxito en la aplicación de la presente propuesta pedagógica.

Gráfico 1. Comparativo de indicadores entre el pre-test y post-test del paso 4 del método de Pólya



Fuente: Pre-test y Post-test
Autor: Investigadores

Análisis e interpretación. - Los resultados que se revelan en la figura 4, afirman que todos los estudiantes han mejorado su capacidad y pensamiento crítico, pues han generado nuevas maneras de resolver los problemas; su conocimiento ya no es memorístico, sino más bien reflexivo.

Resultados de las actividades

Como se mencionó anteriormente, en la propuesta se implementan 4 actividades diferentes. Sin embargo, para el análisis e interpretación de resultados se tomará únicamente la Actividad 4: Tarea Adicional, pues es la que presenta los hallazgos más sobresalientes.

Tabla 3. Tabulación de los resultados de la actividad 4

Nivel: segundo año de bachillerato				
Estudiantes según la cantidad de respuestas correctas (40 estudiantes) Respuestas correctas según la cantidad de problemas del cuadernillo (12 planteamientos)				
Número de problemas	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia porcentual	Frecuencia porcentual acumulada
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	9	9	22,5	22,5
9	11	20	27,5	50,00
10	8	28	20	70,00
11	6	34	15	85,00
12	6	40	15	10,00

Fuente: Elaborada por el autor

Autor: Investigadores

Análisis e interpretación. - De acuerdo a los resultados obtenidos en la actividad 4 y plasmados en la tabla 12, se evidencia que todos los estudiantes tienen más de siete de doce respuestas correctas. El 50% de los estudiantes poseen entre ocho y nueve respuestas correctas. Esto muestra el avance en la comprensión tanto de la metodología de Pólya como en los procesos analíticos empleados para la resolución de problemas acerca de sistemas de ecuaciones lineales; no obstante, hay mucho que mejorar ya que solo 6 estudiantes contestaron correctamente a las 12 interrogantes.

Discusión

Una de las características más sobresalientes del método de Pólya es que permite a los estudiantes a desarrollar el pensamiento lógico-reflexivo, mediante la creación de algoritmos planificados y el aprendizaje colaborativo.

Sabemos que es necesario que el proceso de aprendizaje de la matemática se perfeccione y es por eso que en esta propuesta se planteó la implementación de un método fácil y sencillo, pero que contribuyó de manera significativa en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales.

A continuación, se presentan estudios relacionados con las variables: método de Pólya y aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales.

Casimiro (2017), en su estudio titulado “Método de Pólya en la resolución de problemas de ecuaciones,” concluye que:

Después de tabular los datos obtenidos de los instrumentos aplicados (pre-test y post-test), se concluye que hay una diferencia significativa en el grupo experimental en el aprendizaje de la resolución de problemas de ecuaciones. Adicionalmente, el autor declara que el método de Pólya facilita el desarrollo del razonamiento y la habilidad en la resolución de problemas de ecuaciones; así como también contribuye en la formación de nuevos hábitos de trabajo; por lo que también recomienda utilizar este método que constituye una innovación en el curso de matemáticas (Casimiro, 2017, pág. 29).

En el artículo científico denominado “Método de Pólya para facilitar el planteamiento de ecuaciones en la Educación Superior,” (Cedeño et al., 2019), manifiestan que:

El método Pólya permite al estudiante desarrollar habilidades para entender y comprender un problema matemático, por lo que los estudiantes se apropian de la resolución del mismo, combinando los principios aprendidos en el aula a través de la interpretación y resolución, en busca de una solución con coherencia lógica (Cedeño, 2019, pág. 14).

Finalmente, Meneses & Peñaloza (2019), presentan los resultados de su investigación llevada a cabo con los estudiantes de tercero y cuarto año del Colegio Municipal Aeropuerto-Guatemala. En primera instancia, la prueba de diagnóstico evidencia que los estudiantes tienen dificultad para leer y comprender problemas matemáticos e identificar la operación requerida para encontrar la solución; por lo que, en base a estos resultados se implementa el método de Pólya siendo el que se adapta a las necesidades observadas. Las herramientas proporcionadas permitieron que los estudiantes desarrollen habilidades que les ayudaron a analizar cuidadosamente los diferentes elementos de un problema, diseñando y aplicando diversas estrategias para la correcta solución de problemas. Además, los estudiantes trabajaron de forma estructurada y organizada sin apurarse a dar una respuesta; sino más bien aumentando las posibilidades de resolver de forma asertiva las situaciones planteadas (Meneses & Peñaloza, 2019).

Como se observa en los tres estudios citados, el método Pólya, no solamente contribuye a mejorar el rendimiento de los estudiantes en el área de matemática, que, por cierto, es una de las asignaturas

más complicadas; sino que también ayuda a que los estudiantes desarrollen hábitos, habilidades y capacidades que les permiten ser reflexivos y trabajar de manera colaborativa.

Conclusiones

Como resultado de la implementación de las cuatro actividades referentes a los sistemas de ecuaciones lineales con la aplicación del método de Pólya, se evidencia que los estudiantes se sienten más motivados y muestran mayor interés frente a los procesos de aprendizaje. Los resultados de la actividad 4 indican que el 50% de los estudiantes acertaron entre ocho y nueve respuestas de un total de 12 problemas planteados.

Si bien es cierto, únicamente 6 estudiantes, de los 40 que conformaron la muestra, pudieron resolver el 100% de los problemas, se evidencia una mejora significativa en el rendimiento del objeto de estudio, pues el rango de asertividad es aceptable.

Finalmente, aunque se conoce que matemática es una de las asignaturas en las que mayores dificultades presentan los estudiantes; la presente intervención reveló que los estudiantes pudieron desarrollar habilidades lingüísticas, de reflexión y colaboración, lo que hizo que la resolución de sistemas de ecuaciones lineales se desarrolle de una manera más organizada, sistematizada y efectiva.

Referencias

1. Ahmed, Y. M. (2011). APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. *Temas para la Educación*, 8.
2. Alfaro, C. (2006). LAS IDEAS DE PÓLYA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS1. *CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 13.
3. Alfaro, C. (2006). Las ideas de Pólya en la resolución de problemas. *CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 13.
4. Aznar, E. (2017). *Universidad de Granada*. Obtenido de https://www.ugr.es/~eaznar/sist_ecuaciones.pdf
5. Bravo, P. (2016). Razonamiento lógico abstracto e inteligencia emocional. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, 179-208.

6. Casimiro, M. (2017). *Método Pólya en la resolución de problemas de ecuaciones*. Guatemala: Universidad Rafael Landívar.
7. Cedeño, F. (2019). Método de Pólya para facilitar el planteamiento de ecuaciones en la Educación Superior. *Didáctica y Educación*.
8. Cuicas, M. (2007). EL SOFTWARE MATEMÁTICO COMO HERRAMIENTA PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES DEL PENSAMIENTO. *Actualidades Investigativas en Educación* , 1-34.
9. David Johnson, R. J. (1999). *El aprendizaje cooperativo*. Buenos Aires: Editorial Paidós SAICF .
10. Gavilán, P. (2016). Efectos del aprendizaje cooperativo en el uso de estrategias de aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*.
11. González, B. (2013). Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Universidad de la Laguna.
12. Gutiérrez, O. (25 de Abril de 2009). Obtenido de http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/virtuami/file/int/enfoqpedago_relacion_actv_elprofesorcomomediador.pdf
13. Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (2018). *La educación en Ecuador: logros alcanzados y nuevos desafíos*. Quito: Instituto Nacional de Evaluación Educativa.
14. Llanderas, G. A. (2012). *La motivación en el aula de matemáticas a través del uso de las TICs*. Universidad de Almería.
15. López, J. (2014). *LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE GEORGE POLYA Y SU INFLUENCIA EN EL APRENDIZAJE DEL ÁREA DE MATEMÁTICA EN LOS ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA DE LA I.E. EXPERIMENTAL DE APLICACIÓN DE LA UNE*. UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN "Enrique Guzmán y Valle".
16. Meneses, M., & Peñaloza, D. (2019). Método de Pólya como estrategia pedagógica para fortalecer la competencia resolución de problemas matemáticos con operaciones básicas. *ZonaPróxima*, 8-25.
17. Pérez, Y. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. *Revista de invstigación* .

18. Rodríguez, J. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la investigación educativa. *Investigación Educativa*.
19. Sánchez, P. (2003). Aprendizaje y desarrollo. *Consejo Mexicano de Investigación Educativa*.
20. Sarmiento, M. (2007). LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y LAS NTIC. UNA ESTRATEGIA DE FORMACIÓN PERMANENTE. *UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI*.
21. Sevilla, J. (2017). *Monografías.com*. Obtenido de <https://www.monografias.com/trabajos100/problema-en-investigacion/problema-en-investigacion.shtml>
22. Sobarzo, C. (2017). *INCIDENCIA DEL MÉTODO DE PÓLYA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE INECUACIONES*. Universidad de Concepción.
23. Wong, E. (2015). La actitud crítica un aspecto fundamental en la educación. *Sophia*, 107-114.