



Modelación matemática y simulación de un sistema mecánico dinámico mediante la técnica de Bond-Graph

Mathematical modeling and simulation of a dynamic mechanical system using the Bond-Graph technique

Modelagem matemática e simulação de um sistema mecânico dinâmico usando a técnica de Bond-Graph

Carlos Oswaldo Serrano-Aguilar ^I

carlos.serrano@epoch.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-0653-1115>

Marcelo Esteban Calispa-Aguilar ^{II}

marcelo.calispa@epoch.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-4085-8488>

Edwin Rodolfo Pozo-Safla ^{III}

edwin.pozo@epoch.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-8931-3577>

Correspondencia: carlos.serrano@epoch.edu.ec

Ciencias técnicas y aplicadas

Artículo de investigación

***Recibido:** 19 de abril de 2020 ***Aceptado:** 29 de mayo de 2020 * **Publicado:** 30 de junio de 2020

- I. Magíster en Ingeniería Mecánica con Mención en Materiales y Procesos de Manufactura, Docente Investigador Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
- II. Máster of Philosophy Mechanical and Systems Engineering, Docente Investigador Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
- III. Magíster en Diseño, Producción y Automatización Industrial, Docente Investigador Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.

Resumen

El trabajo tiene como objetivo introducir nuevos métodos de modelación matemática de sistemas mecánicos en el medio local ecuatoriano. Si bien es cierto existe una gran variedad de técnicas como Newton – Euler, Navier – Stokes, Lagrange, principio del trabajo virtual, etc., pero no se ha visto explotada la técnica descriptiva y multi-dominio como Bond – Graph a fin de modelar sistemas en general. En el presente documento se detalla una modelación matemática (mediante Bond-Graph) con su respectiva simulación de un sistema articulado en uno de sus extremos, compuesto por una barra y un sistema de sustentación muelle amortiguador al otro extremo. Partiendo del reposo se ha obtenido el esquema general que representa el modelo Bond-Graph, una reducción de este y a su vez las ecuaciones del modelo a partir del esquema final. Con ello se puede introducir datos geométricos (medidas del modelo) y parámetros físicos (masa, momentos de inercia, constantes de resorte y amortiguación) para evidenciar el comportamiento del sistema mediante la simulación en Matlab del desplazamiento y ángulo versus el tiempo. Llegando a determinar su punto de estabilización del sistema.

Palabras clave: Bond-Graph simulación; sistemas mecánicos dinámicos; muelle-amortiguador; modelo matemático.

Abstract

The main aim of this work is to introduce new methods of mathematical modeling of mechanical systems in the local scenario. Although it is true there is a great variety of techniques such as Newton - Euler, Navier - Stokes, using Lagrange, the principle of virtual work, etc., the descriptive and multi-domain technique such as Bond – Graph for modelling systems in general has not been exploited. This document details a mathematical modeling (using the Bond-Graph) with its respective simulation of an articulated system at one end, consisting of a bar and a damper spring support system at the other end. Starting from rest, the general diagram representing the Bond-Graph model has been obtained, a reduction of the same and the equations of the model from the final diagram. With this, geometric data (model measurements) and physical parameters (mass, moments of inertia, spring constants and damping) can be entered to demonstrate the behavior of the system by simulating the displacement and angle versus time in Matlab. Finally, the point of stabilization of the system is also determined.

Keywords: Bond-Graph simulation, mechanical dynamic systems, spring-damper, mathematical model.

Resumo

O trabalho tem como objetivo introduzir novos métodos de modelagem matemática de sistemas mecânicos no ambiente equatoriano local. Embora seja verdade que existe uma grande variedade de técnicas como Newton - Euler, Navier - Stokes, Lagrange, princípio do trabalho virtual, etc., mas a técnica descritiva e de vários domínios, como Bond - Graph, não foi explorada para modelar sistemas em geral. Este documento detalha uma modelagem matemática (usando o Bond-Graph) com sua respectiva simulação de um sistema articulado em uma de suas extremidades, consistindo em uma barra e um sistema de suporte de mola de amortecedor na outra extremidade. Começando do resto, foi obtido o diagrama geral que representa o modelo Bond-Graph, uma redução disso e, por sua vez, as equações do modelo a partir do diagrama final. Com isso, dados geométricos (medidas do modelo) e parâmetros físicos (massa, momentos de inércia, constantes de mola e amortecimento) podem ser inseridos para demonstrar o comportamento do sistema, simulando o deslocamento e o ângulo versus o tempo no Matlab. Chegando a determinar seu ponto de estabilização do sistema.

Palavras-chave: Simulação de Bond-Graph, sistemas mecânicos dinâmicos, amortecedor de molas, modelo matemático.

Introducción

La simulación como parte del pre diseño es considerado como uno de los parámetros importantes en el desarrollo de la industria, ahorrando tiempo y dinero en predecir fenómenos que ocurren al realizar o no alteraciones en los sistemas de los diferentes dominios de la física (Mecánico, Hidráulico, Eléctrico, etc.)

La mayoría de los modelos son construidos para obtener una mejor idea del comportamiento dinámico de toda clase de sistemas reales en nuestro entorno, sin embargo, es común que se cometa errores relacionados a extrapolaciones del modelo conllevando a abstracciones de este.

Para lograr representar y simular estos modelos dinámicos con sus abstracciones se requiere no solamente ecuaciones matemáticas sino también una notación gráfica, para lo cual se utiliza algunos métodos, entre ellos el denominado método de Bond Graph (BG). Este método es un diagrama de gráfico en el cual existen dos tipos de extremos denominados enlaces (bonds) los

cuales están conectados a puertos (ports) y están encargados de especificar la transferencia de energía entre los componentes del sistema.

Mediante la técnica de Bond Graph, un sistema físico puede ser modelado mediante elementos que tienen la propiedad de generación, almacenamiento, disipación y transformación de la energía. Este diagrama ofrece una visión global del sistema y de su estructura física. Además, tras su extensión “causal”, el BG también ofrece su estructura computacional y revela los posibles problemas matemáticos de su simulación. Todo el sistema resulta abierto y accesible, a diferencia de los métodos clásicos de estudio. Una ventaja adicional del método de BG radica en la facilidad de ensamblaje de sub-modelos o componentes particulares en el modelo general, sin tener que preocuparse de la generación de las ecuaciones adicionales que resultaría tremendamente ardua por métodos clásicos. (Romero Rey, 2005)

Se considera que tiene una estructura puramente topológica y que la información debe ser añadida separadamente y es por este motivo que es considerado como un método ideal para modelación de sistemas mecánicos con movimiento lineal y con ejes de rotación fijos (W Borutzky, 2016).

Los enlaces que se plantean en el método de bond graph pretenden expresar sistemas físicos a través de interacciones de poder mediante dos tipos de variables conocidas como flujo (f) y esfuerzo (e). El uso de estas variables será detallado en la sección de metodología. Cuando el sistema realiza un intercambio de energía con su ambiente, se asocia con un tipo de puerto (energía mecánica, energía eléctrica, etc.) y se pinta una flecha unidireccional que identificará el intercambio de energía a través de los enlaces. (Hroncová, Šarga, & Gmitterko, 2012).

A pesar de las ventajas mencionadas, el uso de este método no ha sido utilizado ampliamente, en especial a nivel local. Existen publicaciones que comprueban su validez para este método en especial en un sistema mecánico masa-resorte-amortiguador, que es un sistema mecánico con elementos sometidos a vibraciones. Probablemente el uso de este método en el tema de vibraciones genera mucho más interés por su aplicación en elementos que requieren optimización en términos de masa. Es este el caso de la optimización de diseño de motores en la industria aeroespacial, priorizando un diseño novedoso, reduciendo costos de operación y controlando mediante BG las vibraciones que se generen en las modificaciones de este tipo de motores al cambiar su configuración (Mir-Haidari & Behdian, 2019).

Sin embargo existen aplicaciones de BG también en motores no necesariamente espaciales, sino en motores de combustión interna o elementos de rotación en general que como objetivo tendrán la optimización del diseño sin reducir su eficiencia y sobrepasar los niveles de vibración permitidos (Huang, Cheng, Zhu, & Li, 2018; Torsvik & Pedersen, 2020).

Por otro lado, el método de BD no solamente se ha restringido para sistemas mecánicos. De hecho, su versatilidad ha permitido que se realicen análisis y modelos de leyes termodinámicas irreversibles (debido al intercambio de energía), modelos en general que incluyan un intercambio de energía, incluida la energía eléctrica incluido el caso de generación de energía en base a hidrogeno e incluso cadenas dinámicas de suministros en la industria manufacturera. (Olivier, Bourasseau, & Bouamama, 2017; Sagawa & Nagano, 2015)

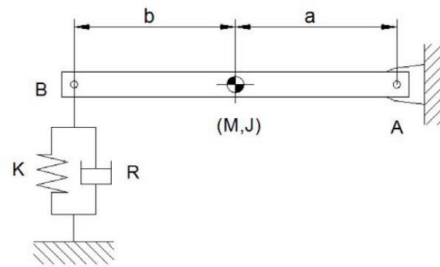
Una vez realizada la modelación (planteamiento de ecuaciones) usualmente se usa software para su simulación o resolución. El software más conocido y utilizado para esta tarea es Matlab y Simulink, por la facilidad que presenta al momento de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas que se podrían presentar en la modelación. (Couenne, Jallut, Maschke, Tayakout, & Breedveld, 2008; Hroncová et al., 2012; Šarga, Hroncová, Čurilla, & Gmitterko, 2012).

De forma general se puede observar que el uso de este método podría llegar a ser de mucha utilidad en todos los campos, en especial en el campo de sistemas mecánicos dinámicos, involucrando la parte de modelación matemática y la ingeniería. Sin embargo, a nivel local nacional no se ha logrado fomentar su implementación incluso sabiendo que se podría utilizar este tipo de simulaciones como material didáctico en el aprendizaje de modelación matemática impartida en las universidades. Por esta razón, el objetivo principal de este trabajo es acoplar esta técnica de modelación matemática a un sistema mecánico con periodo dinámico, para obtener las ecuaciones y realizar su simulación en Matlab.

Metodología

Par este trabajo se considera un sistema mecánico, que consta de una barra que está articulada en el extremo derecho (Punto A) sustentada por un sistema muelle-amortiguador en el extremo izquierdo (punto B).

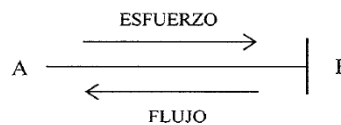
Figura 1: Sistema mecánico por simular



Fuente: Autores, 2020

Previo a la obtención del esquema de Bond Graph, es necesario revisar como un sistema es capaz de modelarse, a partir de la descomposición en varios subsistemas que a su vez deben ser unidos por grafos. Estos sistemas pueden ser de almacenamiento de energía, transporte, disipación o generadores de dicha energía. Para un modelo físico se debe tomar en cuenta que la energía siempre se conserva, así los elementos del sistema deben ser los que intercambien la energía (Principio de conservación de energía). Estos elementos se unen mediante grafos (bonds) y representarán la dirección de flujo o esfuerzo entre los distintos elementos. (Vera, 2014).

Figura 2: Grafos

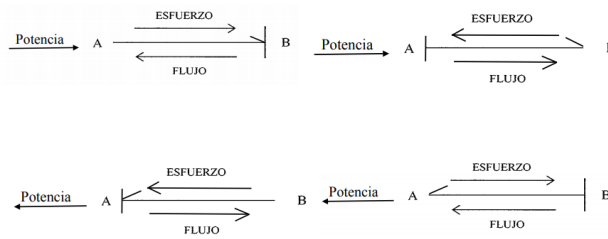


Fuente: Autores, 2020

La definición de causalidad (proceso previo de obtención de las ecuaciones) se realiza en base a la transmisión de potencia, el flujo de potencia se determina mediante una perpendicular al grafo (indica la entrada de flujo) como se indica en la Figura 2 a lo contrario del esfuerzo que toma la dirección opuesta de salida.

En cada grafo deben aparecer dos variables, flujo y esfuerzo, siendo el producto de estas la potencia que fluye en el sistema. Este flujo tiene preferencia en distintos elementos denominándose causalidad. Una vez explicado los puntos de entrada y salida tanto del flujo como del esfuerzo, es necesario determinar cómo fluye la potencia generada por ambas variables. (Ver Figura 3).

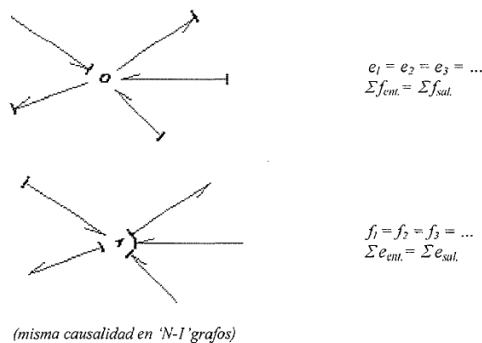
Figura 3: Flujo de potencia de los grafos



Fuente: Autores, 2020

Los elementos pueden además considerarse como, capacitores (elemento de almacenamiento - resorte mecánico), Inercia (elemento de almacenamiento – momento), resistencia (Disipación de energía - fricción), fuentes de energía, transformadores de energía (rotación angular a movimiento lineal). En la técnica de Bond Graph se suele unir los elementos con ceros (0) o unos (1) como se puede observar en la Figura 4.

Figura 4: Unión de los elementos mediante ceros (0) o unos (1)

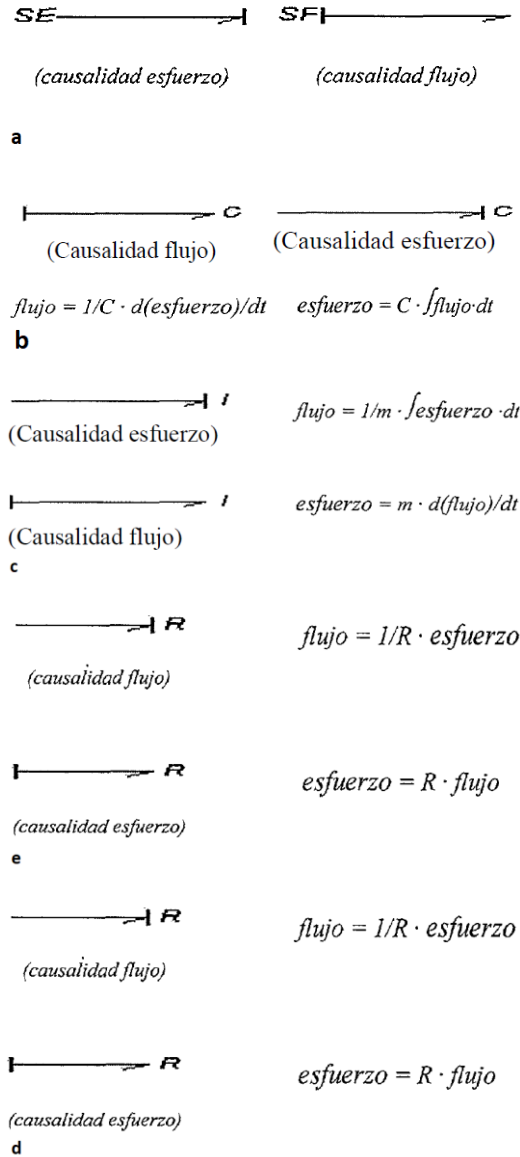


Fuente: Autores, 2020

Para determinar la causalidad, como ejemplo se puede mencionar que, al aplicar una fuerza a un objeto, a esta se le da una velocidad de movimiento, pudiendo también ser opuesto. Esto es primordial al momento de la obtención de las ecuaciones, para ello se menciona las causalidades principales y básicas para el desarrollo del sistema planteado: causalidades fijas (fuentes de flujo y fuentes de esfuerzo Figura 5a.), preferenciales (condensadores o resorte Figura 5b, masa inercial Figura 5c), integral vs diferencial (preferencial la integral), causalidad restringida

(transformadores TF y giradores GY) y causalidad arbitraria (resistores Figura 5d)(Wolfgang Borutzky, 2010).

Figura 5: Causalidades principales



Fuente: Autores, 2020

Con las definiciones dadas en la teoría se obtiene un esquema general para un posterior análisis de reducción.

Una serie de pasos se describen a continuación para llegar a obtener el modelo de Bond – Graph:

- I. Determinar el dominio físico general del sistema y de cada elemento. Asignar un identificativo a cada elemento.
- II. Indicar una variable esfuerzo de referencia. (por ejemplo: en qué sentido la velocidad es positiva).
- III. Identificar las demás velocidades para sistemas mecánicos y asignar etiquetas
- IV. Representar las velocidades mediante uniones 1.
- V. Estimar las diferencias de velocidades y unir con ceros (0).
- VI. Elaborar las diferencias de nodos en los sistemas mecánicos con uniones 0.
- VII. Conectar los puertos para sistemas mecánicos con unos (1)
- VIII. Simplificar el grafo resultante.
- IX. Obtención de las ecuaciones del sistema.
- X. Simular en Matlab el sistema mecánico

Una vez obtenido las ecuaciones luego de un análisis y reducción del esquema se plantea una simulación del comportamiento del sistema, mediante el uso de Matlab con aplicación de ODE45. La mejor interpretación se observa en gráficos que muestren el desplazamiento y ángulo vs el tiempo, con la finalidad de determinar el comportamiento del sistema a medida que pasa el tiempo.

Análisis y discusión de resultados

En la obtención del esquema de Bond Graph se toma en cuenta ciertas consideraciones para una simplificación del diagrama, facilitando así la obtención de sus ecuaciones:

Las constantes de resorte y amortiguación están definidas de la siguiente manera:

K =constante del resorte en B

R =constante de amortiguación en B

K_y =constante del resorte asumida en A ($K_y=1000$ N/m)

R_y =constante de amortiguación asumida en A ($R_y=10000$ Ns/m)

Las entradas de flujo y esfuerzo están denominadas de la siguiente manera de esfuerzo:

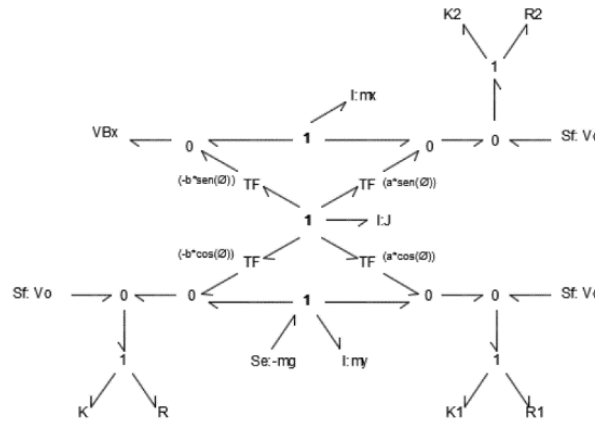
$S_f(V_o)$ =entrada de flujo del suelo al sistema resorte amortiguador en B

$S_f(V_o)$ =entrada de flujo de la pared a la articulación en A

$S_e(-mg)$ =esfuerzo producido por la masa en el eje y.

Con los parámetros planteados para el sistema mecánico indicado en la Figura 1. Se tiene el esquema de la Figura 6.

Figura 6: Diagrama de Bond Graph completo (sin causalidad)



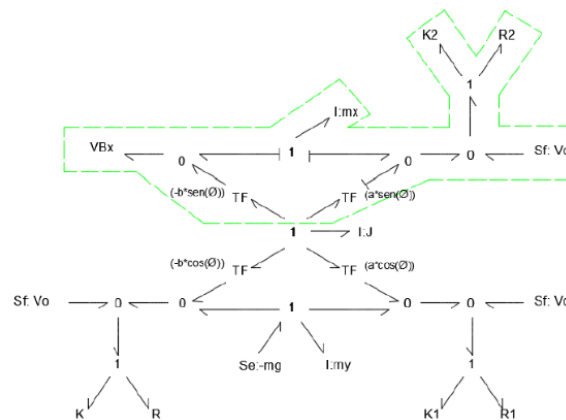
Fuente: Autores, 2020

Se desprecia la velocidad horizontal del punto B, considerando que no hay movimiento en el eje x de este punto.

En la articulación (A) es necesario asumir que está acoplada a un sistema de muelle – amortiguador con constantes K y R muy elevados para restringir el movimiento de la barra en este punto.

La inercia (velocidad) en el eje x del punto A es despreciable ya que se asume que el desplazamiento horizontal es cero, motivo por el que se puede eliminar del diagrama de Bond Graph. Parte subrayada de la Figura 7.

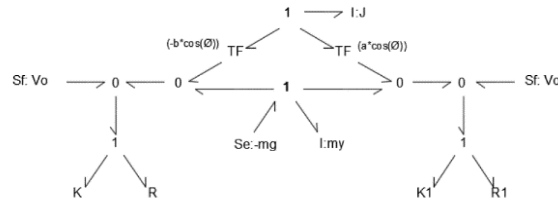
Figura 7: Simplificación del diagrama de Bond Graph (sin causalidad).



Fuente: Autores, 2020

Una vez reducido el sistema tenemos el siguiente diagrama. Figura 8

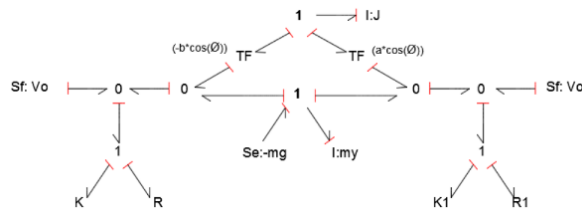
Figura 8: Diagrama de Bond Graph reducido (sin causalidad)



Fuente: Autores, 2020

Se verifica el diagrama con el estudio de la causalidad.

Figura 9: Diagrama de Bond Graph reducido (con causalidad)



Fuente: Autores, 2020

Para obtener las ecuaciones del sistema, se enumera los grafos como se puede observar en la figura 10.

Se identifica las variables independientes para determinar el número de ecuaciones de acuerdo a la causalidad, teniendo 4 variables independientes

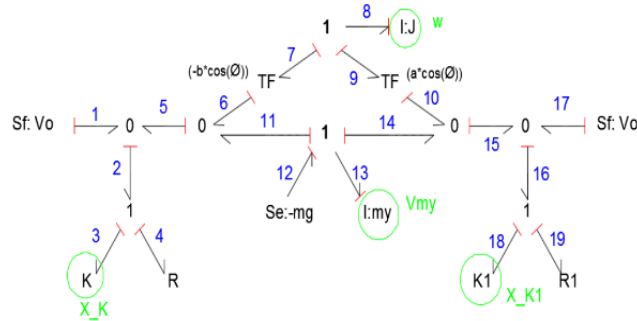
Debido a la velocidad angular

Debido a la masa en el eje y

Debido al desplazamiento del resorte en A

Debido al desplazamiento del resorte en B

Figura 10: Diagrama de Bond Graph reducido (con causalidad)



Fuente: Autores, 2020

A partir del modelo reducido se plantea las ecuaciones del sistema con un total de 19 ecuaciones respecto a los 19 grafos numerados en la Figura 10 y descritas en la Tabla 1.

Además, las ecuaciones de la unión de los elementos se obtienen aplicando la regla de ceros (0) y unos (1) (Flujos y esfuerzos que entran es igual a flujos y esfuerzos que salen).

Tabla 1: Ecuaciones de los nodos de unión aplicando la regla de (1 Y 0)

Esfuerzos	Flujos
$e_2 = e_3 + e_4$	$f_{10} = f_9 * r_{TF}$
$e_3 = e_e * \frac{1}{r_{TF}}$	$f_{10} = a * w * \cos\varphi$
$e_6 = e_7 * \frac{1}{r_{TF}}$	$f_6 = -b * w * \cos\varphi$
$e_7 = e_6 * r_{TF}$	$f_{15} = f_{10} + f_{14}$
$e_{10} = e_9 * \frac{1}{r_{TF}}$	$f_{16} = f_{15} + f_{17}$
$e_9 = e_{10} * r_{TF}$	$f_5 = f_6 + f_{11}$
$e_7 + e_8 + e_9 = 0$	$f_2 = f_1 + f_5$
$e_8 = -e_7 - e_9$	
$e_{11} + e_{13} + e_{14} = e_{12}$	
$e_{13} = e_{12} - e_{11} - e_{14}$	
$e_{16} = e_{18} + e_{19}$	

Fuente: Autores, 2020

Al reemplazar mediante la consideración de causalidades en términos de integral y diferenciación y/o simplificación de las ecuaciones por igualdades se tiene que:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{b * \cos\varphi [KX_K + R(V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi)] - a * \cos\varphi [K_1 X_{K1} + R_1(S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi)]}{J}$$

$$\frac{dV_{my}}{dt} = \frac{[KX_K + R(V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi)] - [K_1 X_{K1} + R_1(S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi)] - mg}{m}$$

$$\frac{dX_K}{dt} = V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi$$

$$\frac{dX_{K1}}{dt} = S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi$$

Para obtener la respuesta del ángulo en función del tiempo se ha introducido una nueva ecuación, la cual está dada de la siguiente manera:

$$\frac{d\varphi}{dt} = w$$

Tabla 2: Ecuaciones del modelo a partir del esquema de la Figura 10

NÚMERO DE GRAFO	FLUJO	ESFUERZO
1	V_0	$KX_K + R(V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi)$
2	$V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi$	$KX_K + R(V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi)$
3	$V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi$	KX_K
4	$V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi$	$R(V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi)$
5	$V_{my} - b * w * \cos\varphi$	$KX_K + R(V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi)$
6	$-b * w * \cos\varphi$	$KX_K + R(V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi)$
7	w	$-b * \cos\varphi [KX_K + R(V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi)]$
8	w	$b * \cos\varphi [KX_K + R(V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi)] - a * \cos\varphi [K_1 X_{K1} + R_1(S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi)]$
9	w	$a * \cos\varphi [K_1 X_{K1} + R_1(S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi)]$
10	$a * w * \cos\varphi$	$K_1 X_{K1} + R_1(S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi)$
11	V_{my}	$KX_K + R(V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi)$
12	V_{my}	$-mg$
13	V_{my}	$[KX_K + R(V_0 + V_{my} - b * w * \cos\varphi)] - [K_1 X_{K1} + R_1(S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi)] - mg$
14	V_{my}	$K_1 X_{K1} + R_1(S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi)$
15	$V_{my} + a * w * \cos\varphi$	$K_1 X_{K1} + R_1(S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi)$
16	$S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi$	$K_1 X_{K1} + R_1(S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi)$
17	S_f	$K_1 X_{K1} + R_1(S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi)$
18	$S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi$	$K_1 X_{K1}$
19	$S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi$	$R_1(S_f + V_{my} + a * w * \cos\varphi)$

Fuente: Autores, 2020

Para obtener las gráficas de la deformación del muelle y la variación del ángulo en función del tiempo se utiliza el algoritmo ode45 quedando de la siguiente manera:

```
Ode45 algoritmo
function barra_ode45()
    global a b m R Ry k ky Vo Sf g J;

    a = 0.5;  %[m]distancia
    b = 0.5;  %[m]distancia
    m = 10;   %[Kg]masa de la barra
    R = 100;  %[Ns/m]Amortiguador (barra-
suelo)
    Ry = 1000; %[Ns/m]Amortiguador (barra-
articulación)
    k = 1000;  %[N/m]Constante elástica de
muelle(barra-suelo)
    ky= 10000;  %[N/m]Constante elástica de
muelle(barra-articulación)
    J= 5;      %[Kg*m^2]
    Vo= 0;     %[m/s]Velocidad de entrada del
suelo
    Sf=0;      %[m/s]Velocidad de entrada de la
pared
    g= 9.81;   %[m/s^2]gravedad

    %y(1)= velocidad angular [rad/s]
    %y(2)= velocidad masa barra [m/s]
    %y(3)= desplazamiento muelle [m](barra-
suelo)
    %y(4)= desplazamiento muelle [m] (barra-
pared)
    %y(5)= desplazamiento angular [rad]
    y=zeros(5,1);
    y=[0 0 0 0 0]; %Condiciones Iniciales.
```

```
[t,y] = ode45(@sistema,[0:0.01:2],y,[]);

% Graficas
nfilas=2;
ncolumnas=2;
subplot(nfilas,ncolumnas,1);
plot(t,y(:,1));
grid on;
title('(a) VELOCIDAD ANGULAR DE LA
BARRA')
ylabel('w (rad/s)')
xlabel('t (s)')
legend ('Angular velocity')

subplot(nfilas,ncolumnas,2);
plot(t,y(:,2));
grid on;
title('(b)VELOCIDAD LINEAL DE LA
BARRA ')
ylabel('V (m/s)')
xlabel('t (s)')
legend ('linear velocity')

subplot(nfilas,ncolumnas,3);
plot(t,y(:,3));
grid on;
title('(c) DEFORMACION DEL MUELLE ')
ylabel('X (m)')
xlabel('t (s)')
legend ('deformation')

subplot(nfilas,ncolumnas,4);
plot(t,y(:,5)*180/pi); %para obtener el
angulo en grados
grid on;
title('(d) ANGULO')
ylabel('Angulo (°)')
```

```

xlabel('t (s)')
legend ('angle')

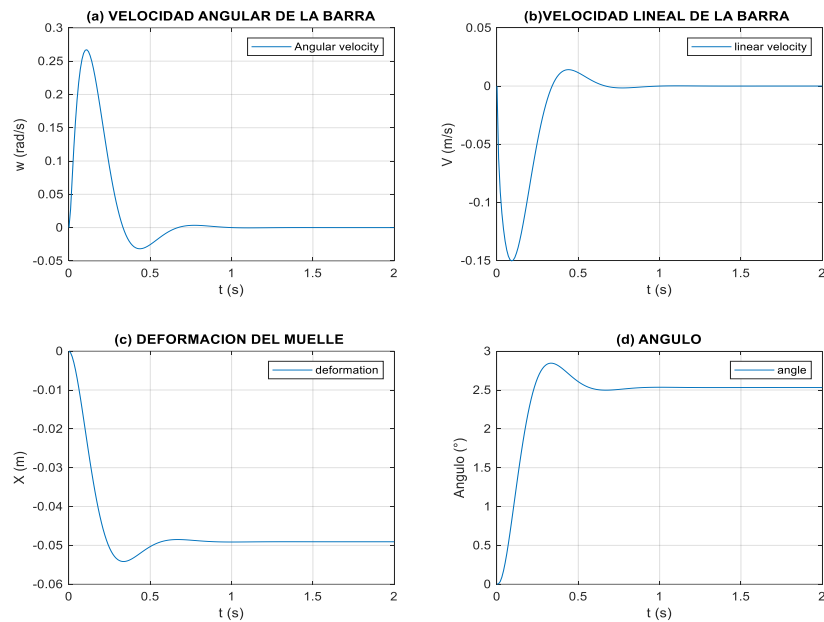
function dy = sistema(t,y)
    global a b m R Ry k ky Vo Sf g J;

    dy=zeros(5,1);

    dy(1) = (b*cos(y(5))*(k*y(3)+R*(Vo+y(2)-
    b*cos(y(5))*y(1)))...
    -
    a*(y(4)*ky+Ry*(Sf+y(2)+a*y(1)*cos(y(5))))/J;
    dy(2) = -(k*y(3)+R*(Vo+y(2)-
    b*y(1)*cos(y(5)))-m*g-(ky*y(4)...
    +Ry*(Sf+y(2)+a*y(1)*cos(y(5))))/m;
    dy(3) = Vo+y(2)-b*y(1)*cos(y(5));
    dy(4) = Sf+y(2)+a*y(1)*cos(y(5));
    dy(5)= y(1);
    
```

Inicialmente el muelle se encuentra en la posición 0 (cero) respecto al eje y, sufriendo después una compresión debido al esfuerzo producido por la masa de la barra, se observa en la Figura 11 (a) que se produce una serie de oscilaciones por estar compuesto del sistema muelle amortiguador, para posteriormente estabilizarse en aproximadamente -0,05 metros con respecto a la vertical.

Figura 11: Comportamiento del sistema en función de (a) velocidad angular (b) velocidad lineal (c) deformación del muelle y (d) ángulo en grados.



Fuente: Autores, 2020

Al deformarse el muelle inicialmente a una longitud mayor a la de estabilización, el ángulo también variará mayormente antes de estabilizarse, teniendo en cuenta que al no variar la posición del muelle el ángulo también debe fijarse, ambos al mismo tiempo como se puede observar en las figuras (c), (d).

Conclusiones

Mediante la técnica de Bond Graph se pudo obtener una serie de ecuaciones matemáticas y simular el modelo constituido por una barra articulada y sustentada por un sistema muelle amortiguador, obteniendo como resultado una deformación del muelle y la variación del ángulo acorde a los datos iniciales.

El diagrama de Bond Graph se ha reducido, facilitando el estudio de la causalidad y disminuyendo el número de grafos y por ende las ecuaciones necesarias para obtener un modelo matemático del sistema.

El tiempo de estabilización de la deformación del muelle es igual al tiempo de estabilización de la variación del ángulo, este resultado es coherente ya que la variación del ángulo se encuentra en relación directa con la deformación del muelle.

Una vez analizada la gráfica de la deformación del muelle, se ha determinado que este sufre una compresión, pero no oscila drásticamente antes de su estabilización, esto es por la resistencia que ofrece el amortiguador.

En el punto A se ha incorporado un sistema muelle amortiguador con valores altos para asegurar que el desplazamiento de la barra con la articulación sea nulo, esto se demostró con la relación $F=Kx$, si se despeja $x=F/K$, el desplazamiento del muelle virtual será aproximadamente 0(cero) debido a que K tiene un valor elevado.

La relación del “transformer” presenta una función coseno del ángulo, la misma que ha sido considerada en las ecuaciones para la simulación, sin embargo, al ser la variación del ángulo aproximada a cero, sino se utiliza la función coseno en la simulación los resultados obtenidos no alteraran en si los resultados.

Referencia

1. Borutzky, W. (2016). Gráficos de enlaces para modelado, control y diagnóstico de fallas de sistemas de ingeniería. Springer International Publishing.
2. Borutzky, Wolfgang. (2010) Metodología del gráfico de bonos: Desarrollo y análisis de modelos de sistemas dinámicos multidisciplinares. Metodología del gráfico de bonos: desarrollo y análisis de modelos de sistemas dinámicos multidisciplinares. <https://doi.org/10.1007/978-1-84882-882-7>
3. Couenne, F., Jallut, C., Maschke, B., Tayakout, M. y Breedveld, P. (2008). Gráfico de enlace para modelado dinámico en ingeniería química. Ingeniería química y procesamiento: intensificación de procesos, 47 (11), 1994–2003. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cep.2007.09.006>
4. Hroncová, D., Šarga, P. y Gmitterko, A. (2012). Simulación de sistema mecánico con dos grados de libertad con gráficos de enlace y MATLAB / Simulink. Procedia Engineering, 48, 223–232. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.508>
5. Huang, L., Cheng, G., Zhu, G. y Li, D. (2018). Desarrollo de una biblioteca de modelos basada en gráficos de bonos para motores diesel turboalimentados. Energy, 148, 728–743. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.02.002>
6. Mir-Haidari, S. E. y Behdian, K. (2019). En el análisis de la ruta de transferencia de vibración de los motores aerodinámicos utilizando la teoría del gráfico de enlace Aerospace Science and Technology, 95, 105516. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105516>
7. Olivier, P., Bourasseau, C. y Bouamama, B. (2017). Modelado dinámico y multifísico del sistema de electrólisis PEM: un enfoque de gráfico de enlace. Revista Internacional de Energía de Hidrógeno, 42 (22), 14872–14904. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2017.03.002>
8. Romero Rey, G. (2005). Procedimientos optimizados utilizando métodos simbólicos para la simulación de sistemas dinámicos mediante Bond-Graph. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/39424675_TESIS_-_Procedimientos_optimizados_utilizando_metodos_simbolicos_para_la_simulacion_de_sistemas_dinamicos_mediante_Bond-Graph

9. Sagawa, J. K. y Nagano, M. S. (2015). Aplicación de gráficos de bonos para modelar la dinámica de fabricación. *IFAC-PapersOnLine*, 48 (3), 2047-2052. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.06.390>
10. Šarga, P., Hroncová, D., Čurilla, M. y Gmitterko, A. (2012). Simulación de un sistema eléctrico usando Bond Graphs y MATLAB / Simulink. *Procedia Engineering*, 48, 656–664. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.567>
11. Torsvik, J. y Pedersen, E. (2020). En el modelado de rotores con rodamientos de elementos rodantes utilizando gráficos de unión. *Journal of Sound and Vibration*, 473, 115205. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115205>
12. Vera, C. y F. J. (2014). Introducción a la técnica de Bond-Graph. *Potencia*, 1–15.

References

1. Borutzky, W. (2016). *Bond Graphs for Modelling, Control and Fault Diagnosis of Engineering Systems*. Springer International Publishing.
2. Borutzky, Wolfgang. (2010). Bond graph methodology: Development and analysis of multidisciplinary dynamic system models. *Bond Graph Methodology: Development and Analysis of Multidisciplinary Dynamic System Models*. <https://doi.org/10.1007/978-1-84882-882-7>
3. Couenne, F., Jallut, C., Maschke, B., Tayakout, M., & Breedveld, P. (2008). Bond graph for dynamic modelling in chemical engineering. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, 47(11), 1994–2003. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cep.2007.09.006>
4. Hroncová, D., Šarga, P., & Gmitterko, A. (2012). Simulation of Mechanical System with Two Degrees of Freedom with Bond Graphs and MATLAB/Simulink. *Procedia Engineering*, 48, 223–232. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.508>
5. Huang, L., Cheng, G., Zhu, G., & Li, D. (2018). Development of a bond graph based model library for turbocharged diesel engines. *Energy*, 148, 728–743. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.02.002>
6. Mir-Haidari, S. E., & Behdinin, K. (2019). On the vibration transfer path analysis of aero-engines using bond graph theory. *Aerospace Science and Technology*, 95, 105516. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105516>

7. Olivier, P., Bourasseau, C., & Bouamama, B. (2017). Dynamic and multiphysic PEM electrolysis system modelling: A bond graph approach. *International Journal of Hydrogen Energy*, 42(22), 14872–14904. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2017.03.002>
8. Romero Rey, G. (2005). Procedimientos optimizados utilizando métodos simbólicos para la simulación de sistemas dinámicos mediante Bond-Graph. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/39424675_TESIS_-_Procedimientos_optimizados_utilizando_metodos_simbolicos_para_la_simulacion_de_sistemas_dinamicos_mediante_Bond-Graph
9. Sagawa, J. K., & Nagano, M. S. (2015). Applying Bond Graphs for Modelling the Manufacturing Dynamics. *IFAC-PapersOnLine*, 48(3), 2047–2052. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.06.390>
10. Šarga, P., Hroncová, D., Čurilla, M., & Gmitterko, A. (2012). Simulation of Electrical System using Bond Graphs and MATLAB/Simulink. *Procedia Engineering*, 48, 656–664. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.567>
11. Torsvik, J., & Pedersen, E. (2020). On the modeling of rotors with rolling element bearings using bond graphs. *Journal of Sound and Vibration*, 473, 115205. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115205>
12. Vera, C. y F. J. (2014). Introducción a la técnica de Bond-Graph. *Potencia*, 1–15.

Referências

1. Borutzky, W. (2016). *Gráficos de Bond para modelagem, controle e diagnóstico de falhas de sistemas de engenharia*. Springer International Publishing.
2. Borutzky, Wolfgang. (2010). Metodologia de Bond Bond: Desenvolvimento e análise de modelos de sistemas dinâmicos multidisciplinares. *Metodologia de Bond Bond: Desenvolvimento e Análise de Modelos Multidisciplinares de Sistemas Dinâmicos*. <https://doi.org/10.1007/978-1-84882-882-7>
3. Couenne, F., Jallut, C., Maschke, B., Tayakout, M., & Breedveld, P. (2008). Gráfico de ligações para modelagem dinâmica em engenharia química. *Engenharia e Processamento Químico: Intensificação de Processo*, 47 (11), 1994-2003. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cep.2007.09.006>

4. Hroncová, D., Šarga, P. e Gmitterko, A. (2012). Simulação de Sistema Mecânico com Dois Graus de Liberdade com Gráficos de Bond e MATLAB / Simulink. *Procedia Engineering*, 48, 223-232. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.508>
5. Huang, L., Cheng, G., Zhu, G. e Li, D. (2018). Desenvolvimento de uma biblioteca de modelos baseada em grafos de ligação para motores a diesel turboalimentados. *Energia*, 148, 728-743. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.02.002>
6. Mir-Haidari, S.E. & Behdinin, K. (2019). Na análise do caminho de transferência de vibração de motores aeronáuticos usando a teoria dos grafos de ligação. *Ciência e Tecnologia Aeroespacial*, 95, 105516. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105516>
7. Olivier, P., Bourasseau, C. e Bouamama, B. (2017). Modelagem de sistemas de eletrólise PEM dinâmica e multifísica: uma abordagem de gráfico de ligações. *International Journal of Hydrogen Energy*, 42 (22), 14872-14904. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2017.03.002>
8. Romero Rey, G. (2005). Procedimentos otimizados usando métodos simbólicos para simulação de sistemas dinâmicos usando o Bond-Graph. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/39424675_TESIS_-_Procedimientos_optimizados_utilizando_metodos_simbolicos_para_la_simulacion_de_sistemas_dinamicos_mediante_Bond-Graph
9. Sagawa, J.K. & Nagano, M.S. (2015). Aplicação de gráficos de títulos para modelagem da dinâmica de fabricação. *IFAC-PapersOnLine*, 48 (3), 2047-2052. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.06.390>
10. Šarga, P., Hroncová, D., Čurilla, M., & Gmitterko, A. (2012). Simulação de sistemas elétricos usando Bond Graphs e MATLAB / Simulink. *Procedia Engineering*, 48, 656-664. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.567>
11. Torsvik, J. & Pedersen, E. (2020). Na modelagem de rotores com rolamentos de elementos rolantes usando gráficos de ligação. *Journal of Sound and Vibration*, 473, 115205. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115205>
12. Vera, C. e F.J. (2014). Introdução à técnica do Bond-Graph. *Potencia*, 1-15.

©2020 por los autores. Este artículo es de acceso abierto y distribuido según los términos y condiciones de la licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).