Polo del Conocimiento

Pol. Con. (Edición núm. 113) Vol. 10, No 12
Diciembre 2025, pp. 274-317
ISSN: 2550 - 682X
DOI: https://doi.org/10.23857/pc.v10i12.10818

Condición de Legendre–Clebsch bajo hipótesis de rango débil en problemas de control óptimo con restricciones mixtas

Legendre–Clebsch condition under weak rank assumption in mixed-constrained optimal control problems

Condição de Legendre-Clebsch sob hipótese de posto fraco em problemas de controlo óptimo com restrições mistas

Jesús Rodríguez Flores [I]
jesus.rodriguez@ute.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-6254-2348

Correspondencia: jesus.rodriguez@ute.edu.ec

Ciencias Técnicas y Aplicadas
Artículo de Investigación

*** Recibido:** 12 octubre de 2025 ***Aceptado:** 17 de noviembre de 2025 *** Publicado:** 08 de diciembre de 2025

I. Universidad UTE, Facultad de Ciencias de la Ingeniería e Industrias, Carrera de Ingeniería en Mecatrónica, Quito, Ecuador.

Resumen

Este trabajo aborda problemas de control con restricciones mixtas, en los que las condiciones clásicas basadas en la condición de independencia lineal de restricciones (LICQ) y en la condición de Legendre–Clebsch sobre todo el espacio de controles pueden resultar excesivamente conservadoras. Se propone un marco de segundo orden basado en una hipótesis de rango débil que permite gradientes activos linealmente dependientes, con el objetivo de vincular la formulación de la segunda variación en programación no lineal con una condición de Legendre–Clebsch formulada en el espacio de controles. A partir de la segunda variación se introduce un cono crítico de direcciones factibles y un subespacio de direcciones críticas del control, y se demuestra que la no negatividad de la forma cuadrática en dicho cono implica que la hessiana del hamiltoniano respecto del control es semidefinida positiva; en el caso coercivo se obtiene una cota de crecimiento cuadrático sobre esas direcciones. El enfoque se ilustra en un problema lineal–cuadrático con control en un cono poliédrico determinado por tres desigualdades, donde la matriz de gradientes tiene rango dos y la hipótesis de rango estándar falla mientras que la condición de Legendre–Clebsch generalizada sigue siendo válida, proporcionando un criterio más fino en problemas degenerados.

Palabras clave: control óptimo; problemas de Bolza; restricciones mixtas; condiciones de segundo orden; condición de Legendre–Clebsch; hipótesis de rango débil; cono crítico radial.

Abstract

This work addresses mixed-constraint control problems, where classical conditions based on the linear constraint independence condition (LCIC) and the Legendre–Clebsch condition over the entire control space can be excessively conservative. A second-order framework is proposed, based on a weak-rank hypothesis that allows linearly dependent active gradients, with the aim of linking the formulation of the second variation in nonlinear programming with a Legendre–Clebsch condition formulated on the control space. From the second variation, a critical cone of feasible directions and a subspace of critical control directions are introduced, and it is shown that the non-negativity of the quadratic form on this cone implies that the Hessian of the Hamiltonian with respect to the control is positive semidefinite; in the coercive case, a quadratic growth bound is obtained on these directions. The approach is illustrated in a linear-quadratic problem with control on a polyhedral cone determined by three inequalities, where the gradient matrix has rank two and the standard rank hypothesis fails, while the generalized Legendre–Clebsch condition remains valid, providing a finer criterion in degenerate problems.

Keywords: optimal control; Bolza problems; mixed constraints; second-order conditions; Legendre–Clebsch condition; weak rank hypothesis; radial critical cone.

Resumo

Este trabalho aborda problemas de controlo com restrições mistas, em que as condições clássicas baseadas na condição de independência de restrições lineares (LCIC) e na condição de Legendre-Clebsch sobre todo o espaço de controlo podem ser excessivamente conservadoras. É proposta uma estrutura de segunda ordem, baseada numa hipótese de posto fraco que permite gradientes ativos linearmente dependentes, com o objetivo de ligar a formulação da segunda variação em programação não linear com uma condição de Legendre-Clebsch formulada no espaço de controlo. A partir da segunda variação, são introduzidos um cone crítico de direções viáveis e um subespaço de direções de controlo críticas, e mostra-se que a não negatividade da forma quadrática neste cone implica que a Hessiana do Hamiltoniano em relação ao controlo é semidefinida positiva; no caso coercivo, obtém-se um limite de crescimento quadrático nestas direções. A abordagem é ilustrada num problema linear-quadrático com controlo num cone poliédrico determinado por três desigualdades, onde a matriz gradiente tem posto dois e a hipótese de posto padrão falha, enquanto a condição de Legendre-Clebsch generalizada permanece válida, fornecendo um critério mais refinado em problemas degenerados.

Palavras-chave: controlo ótimo; problemas de Bolza; restrições mistas; condições de segunda ordem; condição de Legendre-Clebsch; hipótese de posto fraco; cone crítico radial.

Introducción

Las condiciones de optimalidad de segundo orden ocupan un lugar central en el cálculo de variaciones y el control óptimo, pues permiten discriminar entre puntos estacionarios y verdaderos mínimos locales, así como cuantificar la robustez de las soluciones frente a perturbaciones de datos y restricciones. En problemas clásicos gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, la información de segundo orden se organiza de forma natural en torno a la segunda variación del funcional y a la estructura geométrica del conjunto factible, conduciendo a criterios como las condiciones de Legendre y Weierstrass o a formas cuadráticas definidas sobre conos críticos de direcciones admisibles (Hager, 2025; Soledad Aronna & Tröltzsch, 2021). En años recientes, estos desarrollos se han extendido a marcos no locales y fraccionarios, en los que el análisis de segundo orden debe adaptarse a dinámicas con memoria y operadores no locales, reforzando el papel de la segunda variación como herramienta unificadora (Cabré et al., 2024; Cruz et al., 2021).

En control óptimo con restricciones mixtas —es decir, con restricciones que acoplan explícitamente el tiempo, el estado y el control—, la situación es aún más delicada. Problemas de Bolza con restricciones de estado, cotas activas sobre el control y condiciones terminales generan geometrías altamente no lineales del conjunto factible, donde la estructura de los extremos está gobernada por el principio del máximo de Pontryagin y por condiciones de complementariedad entre multiplicadores y restricciones activas. Para este tipo de problemas, se han obtenido condiciones de segundo orden tanto en marcos finito–dimensionales como en contextos infinitodimensionales, incluyendo problemas con restricciones de estado gobernados por ecuaciones parabólicas (Casas et al., 2024), sistemas con restricciones de conjunto en variedad (Deng & Zhang, 2020) y problemas con restricciones de tipo degenerado o no estándar (Arutyunov & Zhukovskiy, 2020; Hehl & Neitzel, 2023; Karamzin, 2023). En estas contribuciones, la segunda variación se formula típicamente como una forma cuadrática sobre un cono crítico de direcciones factibles, y las condiciones de Legendre–Clebsch aparecen como requisitos de semidefinición positiva de la hessiana del Hamiltoniano respecto del control.

De forma paralela, el análisis de segundo orden en cálculo de variaciones y control óptimo se ha visto impactado por avances en programación no lineal (PNL) y optimización con restricciones. En PNL, la no negatividad (o positividad estricta) de formas cuadráticas sobre conos críticos, junto con calificaciones de restricción de segundo orden, permite establecer condiciones necesarias y suficientes de optimalidad incluso cuando fallan hipótesis clásicas como LICQ o el rango constante (Fukuda et al., 2023; Giorgi, 2019; Haeser & Ramos, 2020, 2021). Trabajos recientes han introducido calificaciones de tipo “rango constante relajado” y condiciones de normalidad relativa que garantizan la robustez de los multiplicadores y la validez de resultados de segundo orden bajo estructuras de restricción degeneradas (Andreani, Gómez, et al., 2022; Ma et al., 2023). Estas ideas se han extendido asimismo a problemas con estructuras cónicas o semidefinidas, y a marcos multiobjetivo, donde el papel de los conos críticos y de los multiplicadores normales es esencial para capturar la geometría local del conjunto factible (Bhat et al., 2024a; Byrd et al., 2019; Luenberger & Ye, 2021).

La literatura en control óptimo ha comenzado a incorporar de manera sistemática esta perspectiva geométrica, formulando condiciones de segundo orden adaptadas a restricciones de estado, conjuntos factibles degenerados o problemas gobernados por ecuaciones en derivadas parciales (Casas et al., 2024; Soledad Aronna & Tröltzsch, 2021). Sin embargo, la mayor parte de los resultados disponibles descansa aún sobre calificaciones de rango relativamente fuertes, análogas a LICQ, que exigen independencia lineal de los gradientes de todas las restricciones activas a lo largo de la trayectoria óptima. Además, las versiones clásicas de la condición de Legendre–Clebsch imponen que la hessiana del Hamiltoniano respecto del control sea semidefinida positiva en todas las direcciones admisibles del espacio de controles, sin distinguir entre variaciones realmente críticas —es decir, compatibles con las restricciones linealizadas y con la dinámica— y variaciones artificiales que nunca podrían surgir de un extremal admisible. Esta falta de diferenciación puede conducir a condiciones innecesariamente conservadoras, particularmente en problemas con restricciones redundantes o con fuertes dependencias lineales entre restricciones activas (Andreani, Gómez, et al., 2022; Haeser & Ramos, 2020).

Por otra parte, el desarrollo de problemas de Bolza con estructuras fraccionarias, no locales, estocásticas o jerárquicas está ampliando el espectro de aplicaciones del control óptimo más allá de los modelos deterministas clásicos. En problemas fraccionarios, la dinámica incluye derivados de orden no entero y operadores de tipo memoria que afectan tanto a la formulación del principio del máximo como al análisis de segundo orden (Bergounioux & Bourdin, 2020; Bourdin & Ferreira, 2021; Malmir, 2024; Ndaïrou & Torres, 2023). En problemas estocásticos, la segunda variación debe interpretarse en términos de esperanzas condicionales, y las direcciones críticas pasan a ser procesos adaptados a una filtración dada. En marcos multiobjetivo o bilevel, parte de las restricciones codifican a su vez condiciones de optimalidad de problemas de nivel inferior, lo que hace aún más relevante disponer de un lenguaje de conos críticos y calificaciones de rango que pueda trasladarse entre programación no lineal y control óptimo (Ma et al., 2023).

En este contexto, persiste una brecha relevante en la literatura: falta un marco sistemático que conecte de manera explícita las calificaciones de restricción de segundo orden desarrolladas en programación no lineal con condiciones de Legendre–Clebsch formuladas directamente en el espacio de controles para problemas de Bolza con restricciones mixtas. En particular, se necesita

Pol. Con. (Edición núm. 113) Vol. 10, No 12, Diciembre 2025, pp. 274-317, ISSN: 2550 - 682X

una formulación que: (i) permita trabajar bajo hipótesis de rango débiles, en las que pueden coexistir restricciones activas linealmente dependientes; (ii) exprese la segunda variación en términos de un cono crítico radial de direcciones factibles, capaz de capturar las degeneraciones introducidas por las restricciones; y (iii) derive una condición de Legendre–Clebsch que se exija únicamente sobre las direcciones críticas del control, reflejando de forma fiel las limitaciones impuestas por la dinámica y las restricciones mixtas, y evitando así requerimientos innecesariamente fuertes sobre toda la matriz hessiana en $\mathbb{R}^m$ (Andreani, Gómez, et al., 2022; Deng & Zhang, 2020; Giorgi, 2019; Haeser & Ramos, 2020).

El objetivo general de este trabajo es cerrar parcialmente esta brecha, desarrollando una teoría de segundo orden para problemas de control óptimo de tipo Bolza con extremos variables y restricciones de igualdad y desigualdad en los extremos y a lo largo del intervalo, que combine de forma coherente la estructura geométrica de la programación no lineal con la condición de Legendre–Clebsch en control. Para ello se parte de la segunda variación asociada al problema de Bolza y de las restricciones linealizadas, y se introduce un cono crítico radial de direcciones admisibles que recoge de manera precisa la información relevante para el análisis de segundo orden. Sobre este cono se define, para casi todo tiempo, un subespacio de direcciones críticas del control $\Gamma(t)$, que concentra exactamente aquellas variaciones del control compatibles con la dinámica, las restricciones mixtas y las condiciones de contorno.

A partir de esta construcción, el trabajo formula y demuestra una versión generalizada de la condición de Legendre–Clebsch bajo una hipótesis de rango débil (B), análoga a las calificaciones de restricción relajadas de la programación no lineal. Bajo (B), se garantiza una forma de normalidad relativa de los multiplicadores adjuntos que permite trasladar la información de segundo orden —codificada en una forma cuadrática definida sobre el cono crítico radial— a una condición puntual sobre la hessiana del Hamiltoniano respecto del control. El resultado central establece que, si la forma cuadrática de segundo orden es no negativa (o coerciva) sobre el cono crítico radial, entonces la hessiana del Hamiltoniano es semidefinida positiva (o satisface una cota de coercividad) sobre el subespacio de direcciones críticas del control $\Gamma(t)$ para casi todo tiempo, produciendo así una condición de Legendre–Clebsch más fina y menos conservadora que la versión clásica, pero formulada en un marco suficientemente general para cubrir problemas con dependencias lineales entre restricciones activas (Casas et al., 2024; Deng & Zhang, 2020; Hehl & Neitzel, 2023).

Las contribuciones específicas del artículo pueden resumirse de la siguiente manera:

1. Se introduce, para problemas de Bolza con restricciones mixtas y extremos variables, un cono crítico radial K_{rad} de direcciones admisibles y un subespacio de direcciones críticas del control $\Gamma(t)$, definidos de manera que codifican de forma precisa la interacción entre dinámica, restricciones mixtas y condiciones de contorno en el análisis de segundo orden.
2. Se formula una hipótesis de rango débil (B) para el problema de control, inspirada en las calificaciones de restricción relajadas de la programación no lineal, que permite trabajar con conjuntos de restricciones activas linealmente dependientes siempre que exista un subconjunto modificado que preserve el cono crítico relevante para la segunda variación (Andreani, Gómez, et al., 2022; Haeser & Ramos, 2020; Ma et al., 2023).
3. Se demuestra una condición de Legendre–Clebsch generalizada para problemas de Bolza bajo (B): si la forma cuadrática de segundo orden asociada al extremal es no negativa en el cono crítico radial, entonces la hessiana del Hamiltoniano respecto del control es semidefinida positiva sobre el subespacio de direcciones críticas del control $\Gamma(t)$ para casi todo tiempo; en el caso coercivo, se obtiene además una cota de crecimiento cuadrático estricto en dichas direcciones.
4. Se establece un puente explícito entre la formulación de segundo orden en control óptimo y la teoría de programación no lineal, mostrando cómo la descomposición de la segunda variación en una parte "mixta" y una parte "pura en el control" conduce de manera natural a una condición de Legendre–Clebsch formulada únicamente en términos de $H_{\mathrm{uu}}(t)$ y del subespacio $\Gamma(t)$, en línea con los desarrollos recientes en problemas con restricciones de estado y estructuras degeneradas (Byrd et al., 2019; Casas et al., 2024; Deng & Zhang, 2020; Hehl & Neitzel, 2023; Soledad Aronna & Tröltzsch, 2021).
5. Se presentan ejemplos ilustrativos en dimensión finita que muestran cómo verificar en la práctica la hipótesis de rango débil (B), construir el cono de multiplicadores admisibles y las direcciones críticas, y comprobar la condición de Legendre–Clebsch generalizada en casos donde la calificación de rango estándar falla debido a la presencia de restricciones redundantes, pero la normalidad relativa se preserva. Estos ejemplos conectan de forma constructiva la teoría con problemas lineales–cuadráticos con saturación y con controles restringidos a conos poliédricos, y señalan posibles extensiones hacia marcos fraccionarios,

Pol. Con. (Edición núm. 113) Vol. 10, No 12, Diciembre 2025, pp. 274-317, ISSN: 2550 - 682X

estocásticos y multiobjetivo (Bergounioux & Bourdin, 2020; Bourdin & Ferreira, 2021; Ma et al., 2023; Malmir, 2024; Ndaïrou & Torres, 2023).

El resto del manuscrito se organiza como sigue. La Sección 2 (Metodología) presenta el enfoque teórico general: parte del marco variacional clásico y de las condiciones de segundo orden en cálculo de variaciones, revisa las condiciones de optimalidad en programación no lineal, reformula el problema de control óptimo de tipo Bolza con restricciones mixtas, introduce las hipótesis de rango estándar (A) y débil (B) junto con la segunda variación y el cono crítico radial, y cierra con la estrategia de construcción de ejemplos ilustrativos y las consideraciones de reproducibilidad. La Sección 3 (Resultados y discusión) recoge los resultados principales: se enuncia y demuestra la condición de Legendre–Clebsch bajo rango débil, se interpreta este resultado en el marco de la programación no lineal y del problema de control original, y se analiza en detalle un ejemplo ilustrativo en dimensión finita que muestra cómo verificar las hipótesis de rango y la condición generalizada. Finalmente, la Sección 4 (Conclusiones) sintetiza los aportes teóricos del trabajo, discute su vinculación con la literatura reciente en programación no lineal y control óptimo, y delimita el alcance práctico de los resultados junto con varias líneas concretas de investigación futura.

Metodología

Enfoque general y diseño del estudio teórico

El presente trabajo se inscribe en la categoría de estudios teórico–analíticos en control óptimo y programación no lineal, con énfasis en condiciones de optimalidad de segundo orden bajo hipótesis de rango debilitadas. El foco no está en un sistema físico concreto ni en simulaciones numéricas, sino en la estructura matemática del problema: formulación variacional, geometría del conjunto de restricciones y papel de los multiplicadores de Lagrange. En programación no lineal, los resultados recientes para problemas con restricciones de cono muestran que hipótesis clásicas de rango completo, como la independencia lineal de los gradientes activos (LICQ), pueden sustituirse por propiedades de rango constante débil sin perder validez de condiciones de segundo orden (Fukuda et al., 2023). En paralelo, en control óptimo se han desarrollado condiciones de segundo orden para problemas con restricciones mixtas y dinámicas complejas, donde la estructura de los multiplicadores y la normalidad es crucial en formulaciones tipo Pontryagin reforzadas (Ayala et al., 2021; Hehl & Neitzel, 2023). En esta intersección se sitúa el presente estudio, que analiza problemas de tipo Bolza con restricciones de igualdad y desigualdad mediante herramientas de programación matemática de segunda orden inspiradas en formulaciones recientes (Arutyunov et al., 2022a, 2022b).

El objetivo metodológico central es obtener una versión generalizada de la condición de Legendre–Clebsch para problemas de control óptimo y cálculo de variaciones con restricciones, sustituyendo la hipótesis de rango estándar —basada en independencia lineal de gradientes activos o en normalidad fuerte— por una hipótesis de rango más débil, pero suficiente para controlar los multiplicadores relevantes (Arutyunov et al., 2022a; Fukuda et al., 2023). Para ello, el diseño teórico se organiza en una secuencia de etapas: (i) reformulación variacional del problema de control tipo Bolza, identificando las direcciones de variación admisibles y el papel de las restricciones de trayectoria y de contorno (Arutyunov et al., 2022b); (ii) traducción conceptual a problemas de programación no lineal en dimensión finita, que permite aplicar resultados contemporáneos de segundo orden bajo condiciones de rango debilitadas (Fukuda et al., 2023); (iii) retorno a una formulación continua en forma canónica de Bolza, coherente con el principio del máximo y con la identificación de las derivadas segundas de la Hamiltoniana (Ayala et al., 2021); (iv) formulación de hipótesis de rango debilitadas y derivación de una condición de segundo orden de tipo Legendre–Clebsch apoyada en una estructura de multiplicadores compatible con una normalidad débil (Arutyunov et al., 2022b); y (v) construcción de ejemplos ilustrativos donde la hipótesis estándar de rango falla pero la hipótesis debilitada se verifica, mostrando que la condición de Legendre–Clebsch generalizada sigue siendo aplicable en problemas con estructuras degeneradas (Arutyunov et al., 2022a).

Marco variacional de partida

Como punto de partida, consideramos el problema clásico de cálculo de variaciones con extremos fijos. Sea $T = [t_0, t_1]$ un intervalo compacto y $x: T \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria suficientemente regular (por ejemplo, $x \in C^1(T; \mathbb{R}^n)$o $x \in W^{1,\infty}(T; \mathbb{R}^n)$). El funcional a minimizar tiene la forma canónica

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \qquad (1)$$

donde $L: T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase al menos C^2 en estado y velocidad. En el problema de extremos fijos se imponen

$$x(t_0) = x_0 \qquad x(t_1) = x_1 \tag{2}$$

con $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ dados, y se define el conjunto admisible

$$\mathcal{X}_{\text{ad}} = \{x \in \mathcal{X} \mid x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1\} \tag{3}$$

donde $\mathcal{X}$ es el espacio funcional de referencia. Este marco (1)–(3) sigue siendo el modelo de referencia en desarrollos contemporáneos de condiciones suficientes de segundo orden en cálculo de variaciones (Hager, 2025) y en generalizaciones a contextos fraccionarios o no locales, donde la Lagrangiana depende de operadores con memoria pero se conserva la misma estructura de funcional integral (Cruz et al., 2021).

Para una trayectoria candidata $x^* \in \mathcal{X}_{ad}$, se consideran variaciones

$$x_\varepsilon(t) = x^*(t) + \varepsilon h(t) \tag{4}$$

con $h \in \mathcal{X}$ y $h(t_0) = h(t_1) = 0$. La primera variación, $\delta J[x^*; h]$, conduce bajo hipótesis estándar a la ecuación de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\right) - \frac{\partial L}{\partial x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) = 0, t \in (t_0, t_1) \tag{5}$$

que es condición necesaria de primer orden para el problema (1)–(3) (Hager, 2025). La segunda variación $\delta^2 J[x^*; h]$ da lugar a una forma cuadrática en h y $\dot{h}$, y motiva la condición de Legendre, que exige que la hessiana de L respecto de la velocidad

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \tag{6}$$

sea semidefinida positiva (o negativa en problemas de máximo) casi en todo $t \in [t_0, t_1]$. Esta condición expresa una convexidad local en la variable velocidad y ha sido extendida a contextos fraccionarios y no locales, con condiciones de segundo orden análogas adaptadas a derivadas de Caputo, órdenes distribuidos y otros operadores (Cruz et al., 2021).

La condición de Weierstrass se formula mediante la función exceso

$$E(t, x, \dot{x}; v) = L(t, x, v) - L(t, x, \dot{x}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) \cdot (v - \dot{x}) \tag{7}$$

y exige

$$E(t, x^*(t), \dot{x^*}(t); v) \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n, \text{ p.c.t. } t \in [t_0, t_1] \tag{8}$$

Esta desigualdad puede interpretarse como convexidad local de L en la velocidad vista a través de variaciones "instantáneas" de $\dot{x}$. En problemas no locales, por ejemplo asociados al operador fraccionario de Laplace, (8) se ha generalizado mediante null-Lagrangians y calibraciones que garantizan la minimalidad de soluciones de (5) dentro de familias de extremales (Cabré et al., 2024). En conjunto, distintos trabajos han mostrado la equivalencia, bajo hipótesis adecuadas, entre formulaciones de segundo orden basadas en Legendre, condiciones tipo Jacobi o criterios integrales derivados de problemas de valor inicial (Hager, 2025), lo que motiva revisar críticamente la condición de Legendre–Clebsch cuando se incorporan restricciones adicionales.

Para modelar problemas más generales, se incorporan restricciones de igualdad y desigualdad sobre la trayectoria y/o su derivada, del tipo

$$\Phi(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \Psi(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0, \tag{9}$$

donde $\Phi: T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y

$\Psi: T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$. El funcional (1) se minimiza ahora sobre las trayectorias que satisfacen simultáneamente (2) y (9). Para el análisis variacional se introduce la Lagrangiana aumentada

$$\mathcal{L}(t, x, \dot{x}, \lambda, \mu) = L(t, x, \dot{x}) + \lambda(t)^\top \Phi(t, x, \dot{x}) + \mu(t)^\top \Psi(t, x, \dot{x}) \tag{10}$$

donde $\lambda: T \to \mathbb{R}^m$ es libre y $\mu: T \to \mathbb{R}^q$ satisface $\mu(t) \geq 0$ casi en todo punto. Las condiciones de optimalidad se expresan mediante una ecuación de Euler–Lagrange generalizada para $\mathcal{L}$, complementada por

$$\begin{gathered} \mu(t) \geq 0 \\ \Psi(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \leq 0 \\ \mu(t)^\top \Psi(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

junto con las condiciones de frontera correspondientes. Esquemas análogos se han utilizado en problemas variacionales con derivadas fraccionarias, órdenes distribuidos o retardos, donde primero se obtiene una fórmula de integración por partes adecuada y luego se derivan ecuaciones de Euler–Lagrange generalizadas y condiciones de Legendre/Weierstrass adaptadas (Cruz et al., 2021).

Finalmente, desde la perspectiva del control óptimo, la Lagrangiana aumentada (10) sugiere de forma natural la introducción de un Hamiltoniano extendido que integra los multiplicadores de las restricciones dinámicas e instantáneas, conectando el marco variacional (1)–(3), (9)–(11) con el principio del máximo de Pontryagin y con problemas de control tipo Bolza, incluso en presencia de operadores fraccionarios o no locales (Malmir, 2024). Sobre esta base se formularán, en las secciones siguientes, las versiones generalizadas de la condición de Legendre–Clebsch bajo hipótesis de rango debilitadas.

Construcción del marco de programación no lineal

El paso del problema variacional continuo al entorno finito-dimensional se realiza mediante una discretización del funcional (1) y de las restricciones (incluidas (9)–(11)), lo que conduce a un problema de programación no lineal (NLP) de la forma

$$\min_{y\in\mathbb{R}^d} \varphi(y) \text{ sujeto a } h_j(y) = 0 (j \in \mathcal{E}) \qquad g_i(y) \leq 0 (i \in \mathcal{I}) \tag{12}$$

donde $y \in \mathbb{R}^d$ parametriza trayectoria y control discretizados. El conjunto factible se escribe

$$\Omega := \{y \in \mathbb{R}^d \mid h_j(y) = 0 (j \in \mathcal{E}), g_i(y) \leq 0 (i \in \mathcal{I})\} \tag{13}$$

y sobre Ω se busca un minimizador local y^* de φ, que representa la aproximación finito-dimensional de la trayectoria óptima. Esta formulación es estándar y sirve de base para el análisis de condiciones KKT y de segundo orden en NLP (Luenberger & Ye, 2021). En nuestro contexto, (12)–(13) funcionan como "laboratorio" finito-dimensional para formular condiciones de segundo orden bajo hipótesis de rango debilitadas antes de regresar al marco continuo de control óptimo tipo Bolza.

La Lagrangiana asociada a (12) es

$$\mathcal{L}(y, \lambda, \mu) := \varphi(y) + \sum_{j\in\mathcal{E}} \lambda_j\, h_j(y) + \sum_{i\in\mathcal{I}} \mu_i\, g_i(y) \tag{14}$$

con multiplicadores $\lambda \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ y $\mu \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}|}$. Un punto factible $y^* \in \Omega$ es un punto KKT si existen (λ^*, μ^*) tales que

$$\begin{cases} \nabla_y \mathcal{L}(y^*, \lambda^*, \mu^*) = 0, \\ h_j(y^*) = 0, j \in \mathcal{E}, \\ g_i(y^*) \leq 0, i \in \mathcal{I}, \\ \mu_i^* \geq 0, i \in \mathcal{I}, \\ \mu_i^* g_i(y^*) = 0, i \in \mathcal{I} \end{cases} \tag{15}$$

Bajo cualificaciones clásicas como LICQ, todo mínimo local de (12) admite multiplicadores que satisfacen (15) (Luenberger & Ye, 2021). En el lenguaje de Fritz–John, la normalidad se traduce en que el multiplicador asociado a la función objetivo puede fijarse en 1, propiedad que será clave al comparar estas condiciones con las de tipo Legendre–Clebsch en control óptimo.

Sea ahora $y^* \in \Omega$ un punto factible. El conjunto de índices activos es

$$\mathcal{I}(y^*) := \{\, i \in \mathcal{I} \mid g_i(y^*) = 0\} \tag{16}$$

y la linealización de las restricciones define el conjunto de direcciones tangenciales factibles

$$\mathcal{T}(y^*) := \left\{d \in \mathbb{R}^d \mid \nabla h_j(y^*)^\top d = 0 \;\; (j \in \mathcal{E}), \nabla g_i(y^*)^\top d \le 0\big(i \in \mathcal{I}(y^*)\big)\right\} \tag{17}$$

que aproxima el cono tangente a Ω en y^* (Luenberger & Ye, 2021). Dado un vector de multiplicadores KKT (λ^*, μ^*), el cono crítico clásico se define como

$$\mathcal{C}(y^*, \lambda^*, \mu^*) := \{d \in \mathcal{T}(y^*) \mid \nabla\varphi(y^*)^\top d = 0\} \tag{18}$$

es decir, direcciones tangenciales a lo largo de las cuales la variación de primer orden del objetivo es nula. Sobre $\mathcal{C}(y^*, \lambda^*, \mu^*)$ se formulan las condiciones de segundo orden clásicas: si y^* es un mínimo local y LICQ se cumple, entonces

$$d^\top \nabla^2_{yy}\mathcal{L}(y^*, \lambda^*, \mu^*) d \ge 0 \;\; \forall\, d \in \mathcal{C}(y^*, \lambda^*, \mu^*) \tag{19}$$

lo que expresa la semidefinición positiva de la hessiana de $\mathcal{L}$ sobre el cono crítico (Byrd et al., 2019). Este esquema direcciones críticas/hessiana es el análogo finito-dimensional de la segunda variación en el problema variacional continuo.

Cuando LICQ falla, $\mathcal{T}(y^*)$ y $\mathcal{C}(y^*, \lambda^*, \mu^*)$ pueden dejar de capturar direcciones relevantes para el análisis de segundo orden. Para afrontar este problema, la literatura reciente propone: (i) reformulaciones basadas en propiedades de rango constante (constant rank, weak constant rank) que sustituyen a LICQ y permiten tratar restricciones activas linealmente dependientes (Andreani et al., 2024); (ii) conos críticos modificados que incorporan direcciones tangenciales asociadas a subconjuntos de restricciones activas con propiedades geométricas específicas (Andreani, Gómez, et al., 2022); y (iii) extensiones a marcos multiobjetivo o en variedades, redefiniendo el cono crítico en términos de gradientes ponderados de objetivos y restricciones (Bhat et al., 2024b).

Siguiendo esta línea, partimos de (12) y de las condiciones KKT (15) en un punto candidato y^*, identificamos subconjuntos de restricciones activas con propiedades de rango más débiles que LICQ y construimos un cono de direcciones críticas modificadas $\mathcal{C}_{\mathrm{mod}}(y^*)$ que contiene a $\mathcal{C}(y^*, \lambda^*, \mu^*)$ y añade direcciones tangenciales determinadas por la estructura de rango debilitado. Sobre este cono se formulan condiciones de segundo orden del tipo

$$d^\top \nabla^2_{yy}\mathcal{L}(y^*, \lambda^*, \mu^*) d \ge 0 \; \forall\, d \in \mathcal{C}_{mod}(y^*) \tag{20}$$

que reducen al caso clásico (19) cuando se cumple LICQ, pero siguen siendo informativas bajo hipótesis de rango más generales. Este refinamiento en el nivel de programación no lineal será el puente para trasladar, en secciones posteriores, el análisis a problemas de control óptimo tipo Bolza y formular condiciones de Legendre–Clebsch generalizadas.

Reformulación del problema de control óptimo de tipo Bolza

Consideramos un problema de control óptimo de tipo Bolza, que denotamos por (P), sobre un intervalo compacto $T = [t_0, t_1]$, con estado $x(\cdot): T \to \mathbb{R}^n$ y control $u(\cdot): T \to \mathbb{R}^m$. El funcional de costo es

$$J(x,u) = \varphi\big(x(t_0), x(t_1)\big) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt \qquad (21)$$

donde $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$modela el término en los extremos y
$L: T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es la Lagrangiana de trayectoria.

La dinámica viene dada por

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ p.c.t. } t \in [t_0, t_1] \qquad (22)$$

con $f: T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ suficientemente regular. Los extremos satisfacen

$$\big(x(t_0), x(t_1)\big) \in C \qquad (23)$$

donde $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es cerrado (extremos fijos, libres o sometidos a restricciones). Además, se permiten restricciones mixtas tiempo–estado–control

$$\begin{gathered} h(t, x(t), u(t)) = 0 \\ g(t, x(t), u(t)) \leq 0 \\ \text{p.c.t. } t \in [t_0, t_1] \end{gathered} \qquad (24)$$

con $h: T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ y
$g: T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$. En forma resumida, (P) consiste en minimizar (21) sujeto a (22)–(24).

Para fijar el marco funcional, tomamos

- $\mathcal{X} := W^{1,\infty}(T; \mathbb{R}^n)$ como espacio de trayectorias,
- $\mathcal{U} := L^\infty(T; \mathbb{R}^m)$ o controles medibles acotados en un conjunto compacto $U \subset \mathbb{R}^m$.

Un par $(x,u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ es dinámicamente admisible si satisface (22) y cumple (23). El conjunto de procesos admisibles $\mathcal{A}$ está formado por los pares (x,u) que verifican simultáneamente (22)–(24), y el problema puede escribirse compactamente como

$$\min\{ J(x,u) \mid (x,u) \in \mathcal{A} \}$$

Se asumen hipótesis estándar: f, L, g, h medibles en t y de clase C^1o C^2 en (x,u), con derivadas continuas y acotadas en conjuntos acotados; f localmente Lipschitz en x uniforme en (t,u) para garantizar existencia y unicidad de soluciones de (22); U compacto y convexo (útil para el máximo del Hamiltoniano); y C cerrado, con descripción local suave que permita definir conos tangentes y normales en los extremos. Estas hipótesis se alinean con planteamientos recientes para problemas de Bolza con restricciones mixtas, tanto en el marco clásico como en extensiones fraccionarias o con memoria.

Sea ahora $(x^*, u^*) \in \mathcal{A}$ un proceso óptimo local. El principio del máximo de Pontryagin garantiza la existencia de un multiplicador de costo $\lambda_0 \geq 0$, un coestado $p(\cdot): T \to \mathbb{R}^n$ y multiplicadores de trayectoria $\alpha(\cdot): T \to \mathbb{R}^r$, $\beta(\cdot): T \to \mathbb{R}^q$, no todos nulos, que satisfacen un sistema tipo KKT en tiempo continuo. Se introduce el Hamiltoniano extendido

$$\begin{aligned} &H(t, x, u, p, \lambda_0, \alpha, \beta) \\ &\qquad = p^\top f(t, x, u) - \lambda_0 L(t, x, u) + \alpha^\top h(t, x, u) + \beta^\top g(t, x, u) \end{aligned} \tag{25}$$

Las condiciones necesarias de primer orden pueden resumirse en:

- **Ecuación de estado** (implícita en la admisibilidad):

$\dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t))$ p.c.t. en $[t_0, t_1]$.

- **Ecuaciones adjuntas**:

$$\begin{gathered} -\dot{p}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t), p(t), \lambda_0, \alpha(t), \beta(t)) \\ \text{p.c.t. } t \in [t_0, t_1] \end{gathered} \tag{26}$$

- **Condición de máximo del Hamiltoniano:**

$$\begin{aligned} &H(t, x^*(t), u^*(t), p(t), \lambda_0, \alpha(t), \beta(t)) \\ &\qquad = \max_{v \in U} H(t, x^*(t), v, p(t), \lambda_0, \alpha(t), \beta(t)) \end{aligned} \tag{27}$$

- **Condiciones de transversalidad en los extremos**:

$$\big(p(t_0), -p(t_1)\big) \in \lambda_0 \nabla\varphi\big(x^*(t_0), x^*(t_1)\big) + N_C\big(x^*(t_0), x^*(t_1)\big) \tag{28}$$

donde $N_C(\cdot)$ es el cono normal de C.

- **Condiciones de complementariedad para las restricciones mixtas**, p.c.t. $t \in [t_0, t_1]$:

$$\begin{gathered} \beta(t) \geq 0 \\ g(t, x^*(t), u^*(t)) \leq 0 \\ \beta(t)^\top g(t, x^*(t), u^*(t)) = 0 \end{gathered} \tag{29}$$

Las restricciones de igualdad $h(t,x,u)=0$ no tienen condición de signo y sus multiplicadores $\alpha(t)$ toman valores arbitrarios en $\mathbb{R}^r$. En conjunto, (21)–(29) constituyen la versión en tiempo continuo de un sistema KKT para un problema de Bolza con restricciones mixtas y extremos variables, que servirá de base para el análisis de segundo orden.

Para enlazar estas condiciones con hipótesis de rango y condiciones tipo Legendre–Clebsch, se introduce una descripción geométrica de las restricciones. En los extremos, el conjunto admisible es $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; en el punto óptimo

$$z^* := (x^*(t_0), x^*(t_1))$$

el cono tangente $T_C(z^*)$ describe las direcciones $\delta z = (\delta x_0, \delta x_1)$ que pueden aproximarse mediante pares extremos factibles, y su cono dual $N_C(z^*)$ es el que aparece en (28).

Para cada $t \in T$, definimos el conjunto de pares estado–control admisibles

$$M(t) := \{(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : h(t,x,u) = 0, g(t,x,u) \leq 0\}$$

Los conos tangente y normal a $M(t)$ en $(x^*(t), u^*(t))$, denotados por $T_{M(t)}(x^*(t), u^*(t))$ y $N_{M(t)}(x^*(t), u^*(t))$, capturan la geometría local de las restricciones mixtas. Bajo regularidad adecuada, las variaciones admisibles $(\delta x(t), \delta u(t))$ pertenecen a $T_{M(t)}(x^*(t), u^*(t))$, mientras que los multiplicadores $\alpha(t), \beta(t)$ pueden interpretarse como elementos de $N_{M(t)}(x^*(t), u^*(t))$.

Esta formulación geométrica cumple dos funciones: (i) permite expresar hipótesis de rango y normalidad en términos de conos normales, en línea con enfoques recientes en control óptimo con restricciones de estado y mixtas; y (ii) proporciona el marco natural para definir direcciones críticas y evaluar sobre ellas las formas cuadráticas de segundo orden asociadas al Hessiano del Hamiltoniano. Sobre esta base se construirán, en secciones posteriores, hipótesis de rango debilitadas y una condición de Legendre–Clebsch generalizada para problemas de Bolza con restricciones mixtas y extremos variables.

Formulación de hipótesis de rango y normalidad

Relación entre (A), (B) y normalidad relativa

Retomamos el problema de control óptimo de tipo Bolza formulado en la Sección 2.4, con restricciones en los extremos y restricciones mixtas

$h(t,x,u) = 0, \qquad g(t,x,u) \leq 0$

Denotamos por $I_{\text{ext}}^{=}$ el conjunto de índices de restricciones de igualdad en los extremos, por $I_{\text{ext}}^{\leq}$ el conjunto de restricciones de desigualdad en los extremos, y por

$A_{\text{ext}}(x^*) \subset I_{\text{ext}}^{\leq}$ el conjunto de desigualdades de extremos activas en el proceso óptimo (x^*, u^*). Asimismo,

- E_{mix}: índices de restricciones mixtas de igualdad h_i,
- I_{mix}: índices de restricciones mixtas de desigualdad g_j,
- $A_{\text{mix}}(t) \subset I_{\text{mix}}$: desigualdades mixtas activas en $(t, x^*(t), u^*(t))$.

En los extremos se considera la familia de gradientes activos en $\mathbb{R}^{2n}$

$$\mathcal{G}_{\text{ext}} := \{\nabla c_k(x^*(t_0), x^*(t_1)) : k \in I_{\text{ext}}^{=} \cup A_{\text{ext}}(x^*)\}$$

y, para cada $t \in [t_0, t_1]$, la familia de gradientes activos en $\mathbb{R}^{n+m}$ asociada a las restricciones mixtas

$$\mathcal{G}_{\text{mix}}(t) := \{\nabla_{(x,u)} h_i(t, x^*(t), u^*(t)) : i \in E_{\text{mix}}\} \cup \{\nabla_{(x,u)} g_j(t, x^*(t), u^*(t)) : j \in A_{\text{mix}}(t)\}$$

Agrupamos estas familias en operadores lineales (matrices “altas”)

$G_{\text{ext}}(x^*)$ y $G_{\text{mix}}(t, x^*(t), u^*(t))$, cuyas filas son precisamente dichos gradientes. La hipótesis de rango estándar (A) se formula como independencia lineal de los gradientes activos:

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} \mathrm{G}_{\text{ext}}(x^*(t_0), x^*(t_1)) &= \#(I_{\text{ext}}^{=} \cup A_{\text{ext}}(x^*)) \\ \operatorname{rank} \mathrm{G}_{\text{mix}}(t, x^*(t), u^*(t)) &= r + \# A_{\text{mix}}(t) \text{ p.c.t. en } [t_0, t_1] \end{aligned} \tag{30}$$

Es decir, en los extremos y para casi todo t, los gradientes de las restricciones activas son linealmente independientes. Esta es la versión infinito–dimensional de LICQ en programación no lineal finito–dimensional. Bajo (30), las condiciones de primer orden (ecuaciones adjuntas, maximización del Hamiltoniano y condiciones de transversalidad) admiten multiplicadores de Lagrange únicos y el proceso óptimo (x^*, u^*) es normal en el sentido clásico ($\lambda_0 > 0$).

Este tipo de hipótesis de rango es estándar en la teoría contemporánea de programación no lineal y en las condiciones de segundo orden, donde LICQ y sus variantes garantizan unicidad de multiplicadores y buena definición de los conos críticos sobre los que se evalúan las formas cuadráticas de segundo orden (Andreani, Gómez, et al., 2022; Giorgi, 2019; Haeser & Ramos, 2020; Luenberger & Ye, 2021).

Hipótesis de rango débil (B) y normalidad relativa

Retomamos el problema de control óptimo de tipo Bolza formulado en la Sección 2.4, con restricciones en los extremos y restricciones mixtas

La hipótesis (A), aunque natural, puede resultar demasiado exigente cuando existen restricciones redundantes o fuertemente correlacionadas: los gradientes activos pueden ser linealmente dependientes sin que ello invalide las condiciones de segundo orden. Para tratar estos casos introducimos una hipótesis más débil, basada en normalidad relativa de los multiplicadores.

Sea $G(x,u)$ el operador que agrupa todas las restricciones de (P) (condiciones en los extremos y restricciones mixtas en el intervalo). Su derivada de Fréchet en el proceso óptimo (x^*,u^*) se denota por $DG(x^*,u^*)$, y el sistema linealizado de restricciones se escribe de forma compacta como

$$DG(x^*,u^*)(\delta x,\delta u)=0$$

para variaciones $(\delta x,\delta u)$ pertenecientes al cono tangente introducido en la sección de geometría de restricciones (Sección 2.4).

El conjunto de multiplicadores $(\lambda_0,p,\alpha,\beta)$ que aparecen en el principio del máximo de Pontryagin (ecuaciones (21)–(29)) define un "espacio dual" de restricciones. Fijado un cuádruple óptimo $(\lambda_0^*,p^*,\alpha^*,\beta^*)$, definimos el cono de multiplicadores admisibles

$$K(x^*,u^*):=\left\{\begin{matrix}(\lambda_0,p,\alpha,\beta)\mid\lambda_0\geq 0\\ \beta_j(t)\geq 0\ \forall\, j\in A_{\text{mix}}\,(t)\\ \beta_j(t)=0\ \forall\, j\notin A_{\text{mix}}\,(t)\end{matrix}\right\} \tag{31}$$

Diremos que (x^*,u^*) satisface la hipótesis de rango débil (B) si se cumple la siguiente propiedad de normalidad relativa:

$$\begin{gathered}DG(x^*,u^*)^{\top}(\lambda_0,p,\alpha,\beta)=0\\ (\lambda_0,p,\alpha,\beta)\in K(x^*,u^*)\Longrightarrow(\lambda_0,p,\alpha,\beta)=(0,0,0,0)\end{gathered} \tag{32}$$

Es decir, la única combinación de gradientes de restricciones (en los extremos y a lo largo de la trayectoria) con coeficientes compatibles con los signos y el patrón de actividad de un multiplicador óptimo, que produce el vector nulo, es la combinación trivial. Esta propiedad excluye extremales anormales dentro de $K(x^*,u^*)$ sin exigir independencia lineal de todos los gradientes activos.

La formulación (32) es el análogo, en control óptimo, de las calificaciones de restricción débiles de segunda orden (Abadie modificado, condiciones de Ben-Tal de segunda orden o variantes de rango constante relajado) propuestas en programación no lineal para garantizar la validez de condiciones de segundo orden sin requerir LICQ (Giorgi, 2019; Haeser & Ramos, 2020).

Relación entre (A), (B) y programación no lineal

La relación lógica entre las hipótesis (A) y (B) puede resumirse así:

Pol. Con. (Edición núm. 113) Vol. 10, No 12, Diciembre 2025, pp. 274-317, ISSN: 2550 - 682X

- **(A) implica (B).**

Si se verifica (A), los gradientes activos en los extremos y a lo largo de la trayectoria son linealmente independientes; los operadores G_{ext}y G_{mix}tienen rango máximo, y en términos del operador global

$$DG(x^*, u^*): (\delta x, \delta u) \mapsto DG(x^*, u^*)(\delta x, \delta u)$$

se tiene

$$\ker DG(x^*, u^*)^\top = \{0\}$$

Como el cono $K(x^*, u^*)$ definido en (31) es un subconjunto del espacio de multiplicadores, la intersección $\ker DG(x^*, u^*)^\top \cap K(x^*, u^*)$ es también $\{0\}$, de modo que se cumple la normalidad relativa (32). En este sentido, (B) es consecuencia inmediata de (A).

(B) es estrictamente más débil que (A).

La hipótesis (B) no exige independencia lineal de todo el conjunto de restricciones activas: algunos gradientes pueden ser linealmente dependientes, siempre que exista un subconjunto modificado de restricciones activas $\mathcal{C}_{\mathrm{mod}}(x^*, u^*)$ (análogo al introducido en la Sección 2.3 para el problema de programación no lineal) que genere el mismo cono tangente relevante para la segunda variación y satisfaga una condición de rango constante o un Abadie modificado de segunda orden.

Este patrón es bien conocido en programación no lineal: diversos trabajos muestran que condiciones de tipo “rango constante relajado” o “nuevas calificaciones de restricción con propiedades de segundo orden” permiten derivar condiciones necesarias y suficientes de segundo orden incluso cuando LICQ falla (Andreani, Gómez, et al., 2022; Giorgi, 2019; Haeser & Ramos, 2020). En un contexto afín, Ma et al. (2023) combinan condiciones de segundo orden y calificaciones de restricción en problemas de *bilevel programming*, destacando el papel de la normalidad relativa y de los conos críticos en la obtención de condiciones de optimalidad robustas.

Al trasladar estas ideas al control óptimo, las hipótesis (A) y (B) actúan como puente conceptual entre la teoría de programación no lineal y la generalización de la condición de Legendre–Clebsch:

- (A) reproduce el escenario clásico: LICQ (o rango constante) en cada punto de la trayectoria, normalidad global del extremal y condiciones de segundo orden formuladas sobre un cono crítico bien definido.

- (B) extiende este marco a situaciones con restricciones redundantes o dependencias lineales, siempre que pueda identificarse un conjunto modificado de restricciones y un cono de multiplicadores $K(x^*, u^*)$ que verifiquen (32).

En las secciones posteriores, estas hipótesis de rango se utilizarán para formular y demostrar una versión generalizada de la condición de Legendre–Clebsch para problemas de Bolza con restricciones mixtas y extremos variables, empleando como herramienta central la estructura geométrica de los conos tangentes y normales introducidos en la Sección 2.4.

Derivación de la condición de Legendre–Clebsch bajo (B)

Trabajamos a lo largo del proceso óptimo (x^*, u^*) del problema de Bolza (P), con multiplicadores $(\lambda_0^*, p^*, \alpha^*, \beta^*)$ que satisfacen el principio del máximo de Pontryagin y las condiciones de complementariedad. Definimos las matrices linealizadas

$$A(t) := f_x(t, x^*(t), u^*(t)), \qquad B(t) := f_u(t, x^*(t), u^*(t))$$

de modo que, para una variación del control $w(\cdot)$, la variación de estado $z(\cdot)$ verifica la ecuación linealizada

$$\dot{z}(t) = A(t)\, z(t) + B(t)\, w(t), \quad \text{p.c.t. } t \in [t_0, t_1] \tag{33}$$

Las restricciones mixtas $h(t, x, u) = 0$, $g(t, x, u) \leq 0$ se linealizan como

$$\nabla_{(x,u)} h_i(t, x^*(t), u^*(t)) \cdot (z(t), w(t)) = 0, i \in E_{\text{mix}} \tag{34}$$

$$\nabla_{(x,u)} g_j(t, x^*(t), u^*(t)) \cdot (z(t), w(t)) \leq 0, j \in A_{\text{mix}}(t), \text{p.c.t. } t \in [t_0, t_1] \tag{35}$$

y las restricciones de extremos imponen

$$(z(t_0), z(t_1)) \in T_C(x^*(t_0), x^*(t_1)) \tag{36}$$

donde T_C es el cono tangente al conjunto admisible de extremos C.

En cada t definimos el conjunto de direcciones tangenciales del control

$$\Gamma(t) := \left\{ \begin{matrix} w \in \mathbb{R}^m \mid \nabla_u h_i(t, x^*(t), u^*(t)) w = 0 \forall i \in E_{\text{mix}} \\ \nabla_u g_j(t, x^*(t), u^*(t)) w \leq 0 \forall j \in A_{\text{mix}}\,(t) \text{con} \beta_j^*(t) > 0 \end{matrix} \right\} \tag{37}$$

y el conjunto global de direcciones admisibles

$$\Gamma := \left\{ \begin{matrix} w(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m \mid w \text{ es medible y acotada} \\ \text{y } w(t) \in \Gamma(t) \text{ p.c.t. } t \end{matrix} \right\} \tag{38}$$

Para $w \in \Gamma$, llamamos (z, w) una dirección tangencial si z resuelve (33) y cumple (34)–(36). El conjunto de direcciones críticas primarias se define por

$$\Gamma_0 := \left\{ \begin{array}{c} (z,w) \mid w \in \Gamma, z \text{ resuelve } (33) \\ \delta J(x^*, u^*; z, w) = 0 \\ \big(z(t_0), z(t_1)\big) \in T_C\big(x^*(t_0), x^*(t_1)\big) \end{array} \right\} \tag{39}$$

donde δJ es la primera variación del funcional de costo. Fijado el cuádruple $(\lambda_0^*, p^*, \alpha^*, \beta^*)$, el conjunto de direcciones críticas relativas al multiplicador se define como

$$\Gamma_\lambda := \left\{ (z,w) \in \Gamma_0 \mid \int_{t_0}^{t_1} \langle p^*(t), f_u(t, x^*(t), u^*(t)) w(t) \rangle dt = 0 \right\} \tag{40}$$

Recordemos el Hamiltoniano extendido (definido en la sección previa):

$$\begin{aligned} &H(t,x,u,p,\lambda_0,\alpha,\beta) \\ &\qquad = p^\top f(t,x,u) + \lambda_0 L(t,x,u) + \alpha^\top h(t,x,u) + \beta^\top g(t,x,u) \end{aligned} \tag{41}$$

A lo largo del extremal (x^*, u^*)y del cuádruple $(\lambda_0^*, p^*, \alpha^*, \beta^*)$, definimos

$$H_{xx}(t) := \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t), \lambda_0^*, \alpha^*(t), \beta^*(t))$$

$$H_{xu}(t) := \frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial u}(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t), \lambda_0^*, \alpha^*(t), \beta^*(t))$$

$$H_{uu}(t) := \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t), \lambda_0^*, \alpha^*(t), \beta^*(t))$$

Usando las ecuaciones adjuntas, la condición de estacionariedad respecto al control y las condiciones de contorno, la segunda variación de Jen la dirección (z, w) puede escribirse como

$$\begin{aligned} &\delta^2 J(x^*, u^*; z, w) \\ &\qquad = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\langle H_{xx}(t) z(t), z(t) \rangle + 2 \langle H_{xu}(t) z(t), w(t) \rangle \\ &\qquad + \langle H_{uu}(t) w(t), w(t) \rangle] dt + \Delta_{\text{ext}}(z) \end{aligned} \tag{42}$$

donde $\Delta_{\text{ext}}(z)$ agrupa términos de segundo orden asociados a las restricciones en los extremos. La condición necesaria de segundo orden para mínimo débil exige

$$\delta^2 J(x^*, u^*; z, w) \geq 0 \text{ para toda dirección crítica } (z,w) \in \Gamma_\lambda \tag{43}$$

Bajo la hipótesis de rango débil (B), no existen combinaciones no triviales de gradientes de restricciones con coeficientes en el cono de multiplicadores $K(x^*, u^*)$ que produzcan el vector nulo, lo que asegura una normalidad relativa del cuádruple $(\lambda_0^*, p^*, \alpha^*, \beta^*)$. Esto permite construir variaciones localizadas del control (tipo “aguja”) apoyadas en pequeños intervalos alrededor de un tiempo fijo $\tau \in (t_0, t_1)$, de manera que las direcciones $(z_\varepsilon, w_\varepsilon) \in \Gamma_\lambda$ se concentran en torno a τ y satisfacen $\delta J = 0$. Al insertar tales variaciones en (42)–(43) y hacer tender el soporte a cero, se obtiene que, para casi todo $\tau \in [t_0, t_1]$ y toda dirección $w_\tau \in \Gamma(\tau)$ compatible con Γ_λ,

$$\langle H_{uu}(\tau)\, w_\tau, w_\tau \rangle \leq 0, \text{ p.c.t. } \tau \in [t_0, t_1] \text{ y toda } w_\tau \in \Gamma(\tau) \text{ compatible con } \Gamma_\lambda \qquad (44)$$

De aquí se deduce el siguiente resultado.

Teorema 2.1 (Condición de Legendre–Clebsch bajo (B)).

Sea (x^*, u^*) un mínimo débil local de (P) que satisface las condiciones de primer orden y la hipótesis de rango débil (B). Entonces, para casi todo $t \in [t_0, t_1]$ y toda dirección $w(t) \in \Gamma(t)$ asociada a una dirección crítica $(z, w) \in \Gamma_\lambda$, se cumple

$$\langle H_{uu}(t)\, w(t), w(t) \rangle \leq 0 \ \text{ p.c.t. } t \in [t_0, t_1] \qquad (45)$$

Es decir, $H_{uu}(t)$ es negativa semidefinida en las direcciones críticas del control a lo largo de la trayectoria óptima: esta es la versión generalizada de la condición de Legendre–Clebsch bajo (B), donde la negatividad se exige sólo sobre el cono de direcciones críticas determinado por las restricciones activas y el patrón de multiplicadores normales, no sobre todo $\mathbb{R}^m$.

Bajo la hipótesis de rango estándar (A), los gradientes de todas las restricciones activas son linealmente independientes y el cono crítico puede describirse sin recurrir al cono $K(x^*, u^*)$. En el caso de controles interiores, la condición clásica de Legendre–Clebsch toma la forma

$$\langle H_{uu}(t) w, w \rangle \leq 0 \ \ \forall \ w \in \mathbb{R}^m \text{ (o para toda dirección admisible en } u \text{),} \quad \text{para casi todo } t \in [t_0, t_1] \qquad (46)$$

es decir, $H_{uu}(t)$ debe ser negativa semidefinida en todas las direcciones admisibles del control. En síntesis, (A) implica (B) y la condición clásica (46) se recupera como caso particular, mientras que bajo (B) basta exigir que $H_{uu}(t)$ sea negativa semidefinida sólo sobre las direcciones críticas relevantes para el mínimo, lo que permite tratar problemas con restricciones redundantes o altamente correlacionadas sin perder la capacidad de obtener condiciones de segundo orden útiles.

El resultado anterior puede interpretarse como una versión generalizada de la condición de Legendre–Clebsch en el espíritu de los trabajos clásicos sobre extremales singulares, en los que la semidefinición de H_{uu} se interpreta como condición de segundo orden necesaria para mínimos locales, y donde las direcciones relevantes del control quedan determinadas por la estructura de multiplicadores y restricciones activas. Al mismo tiempo, la formulación sobre el cono crítico conecta con el enfoque moderno de condiciones de segundo orden en programación no lineal y control óptimo, en el que la hessiana de la Lagrangiana o del hamiltoniano se evalúa únicamente sobre el subconjunto de direcciones factibles que capturan la geometría local del problema (véanse,

Pol. Con. (Edición núm. 113) Vol. 10, No 12, Diciembre 2025, pp. 274-317, ISSN: 2550 - 682X

por ejemplo, Kelley, 1964; Goh, 1966; Robbins, 1967, para las formulaciones clásicas de Legendre–Clebsch generalizada, y trabajos más recientes sobre condiciones de segundo orden basadas en conos críticos y formulaciones tipo Pontryagin, como Andreani et al., 2010, 2017; Bonnans et al., 2014; Byrd et al., 2019; Hager, 2025).

Estrategia de construcción de ejemplos ilustrativos

La finalidad de los ejemplos es mostrar situaciones en las que (i) la hipótesis de rango estándar (A) falla por dependencia lineal de los gradientes de las restricciones activas, (ii) la hipótesis de rango débil (B) sigue siendo válida y asegura normalidad relativa, y (iii) el cálculo de la matriz H_{uu} y del cono de direcciones críticas del control es completamente explícito. De este modo se evidencia que las condiciones de segundo orden continúan siendo informativas más allá del marco clásico de independencia lineal, en línea con desarrollos recientes en programación no lineal y control óptimo con restricciones (Andreani, Gómez, et al., 2022; Arutyunov et al., 2022b; Giorgi, 2019; Haeser & Ramos, 2020, 2021; Karamzin, 2023; Ma et al., 2023).

La selección de ejemplos responde a tres criterios básicos. Primero, se fuerza el fallo de (A): se construyen problemas donde la matriz formada por los gradientes de las restricciones activas (en los extremos, en las restricciones mixtas o en el control) tiene rango estrictamente menor que el número de restricciones activas, reproduciendo degeneraciones típicas del fallo de LICQ en programación no lineal (Andreani, Gómez, et al., 2022; Giorgi, 2019; Haeser & Ramos, 2020). Segundo, se garantiza la validez de (B): pese a la degeneración, la geometría del problema se ajusta de modo que cualquier combinación de gradientes de restricciones, con coeficientes compatibles con el patrón de signos de los multiplicadores, que da lugar al vector nulo sea necesariamente trivial, preservando así la normalidad relativa y el contenido de la condición de Legendre–Clebsch bajo (B). Tercero, se prioriza el cálculo explícito de H_{uu} y de las direcciones críticas: se consideran dinámicas lineales y costos cuadráticos (o casi cuadráticos), con restricciones simples (intervalos de saturación o conos poliédricos), de manera que H_{uu}, el cono de direcciones críticas del control y la condición de Legendre–Clebsch puedan analizarse sin recurrir a cálculos simbólicos complejos (Arutyunov et al., 2022b; Bourdin & Ferreira, 2021; Karamzin, 2023).

El primer ejemplo se basa en un problema lineal–cuadrático con un único control escalar y saturación. La dinámica viene dada por

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b \cdot u(t), \qquad t \in [t_0, t_1] \tag{47}$$

con $x(t) \in \mathbb{R}$ y $u(t) \in \mathbb{R}$, y el control se restringe a

$$\mathrm{u(t)} \in [\mathrm{u}_{min}, \mathrm{u}_{max}] \text{ p.c.t. } \mathrm{t} \in [\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1] \quad (48)$$

lo que modela una saturación escalar. El funcional de Bolza se elige de tipo cuadrático,

$$J(x,u) = \varphi\big(x(t_0), x(t_1)\big) + \int_{t_0}^{t_1} (qx(t)^2 + ru(t)^2)dt \quad (49)$$

y los parámetros $(a, b, q, r, u_{\min}, u_{\max})$ y las condiciones de contorno se escogen de modo que (i) el control óptimo sin saturación salga del intervalo permitido en una región de tiempo, activando una de las desigualdades en (48); (ii) el conjunto de gradientes de las restricciones activas (incluidas, en su caso, restricciones terminales) presente dependencia lineal, de manera que (A) falle; y (iii) la estructura de multiplicadores del extremal siga siendo normal y satisfaga (B). En estas condiciones, H_{uu} asociado al Hamiltoniano extendido toma una expresión particularmente simple (en el caso LQ estándar, proporcional a r), y la verificación de la condición de Legendre–Clebsch sobre las direcciones críticas del control se reduce al análisis del signo de una forma cuadrática unidimensional, ilustrando que la degeneración en la matriz de gradientes de restricciones no impide la validez de la condición de Legendre–Clebsch en el cono de direcciones críticas relevante (Arutyunov et al., 2022a; Bourdin & Ferreira, 2021).

El segundo ejemplo utiliza un sistema bidimensional con controles restringidos a un cono poliédrico en $\mathbb{R}^2$. La dinámica se plantea como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(t) \in \mathbb{R}^2 \quad (50)$$

con $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, y el conjunto de controles admisibles tiene la forma

$$U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid Du \le 0\} \quad (51)$$

onde $D \in \mathbb{R}^{k\times 2}$, $k \ge 2$. El funcional de Bolza incluye un término terminal y un integrando cuadrático $x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top Ru(t)$, con $Q \succeq 0$y $R \succ 0$. Se construye una trayectoria óptima (x^*, u^*) tal que: (i) varias filas de D se activan simultáneamente en intervalos de tiempo no triviales, de modo que varias desigualdades $D_j u(t) \le 0$ se satisfacen como igualdades; (ii) la matriz formada por las filas activas de D es degenerada, por lo que (A) no se verifica; y (iii) la dinámica, los pesos del costo y las condiciones de contorno permiten un multiplicador normal que verifica (B). En este contexto, la estructura del cono de controles hace posible describir el conjunto de direcciones críticas del control $\Gamma_\lambda(t)$ como vectores tangentes a las caras activas de U, compatibles con la linealización de la dinámica; la condición de Legendre–Clebsch se traduce entonces en la semidefinición negativa de $H_{uu}(t)$ sobre $\Gamma_\lambda(t)$, conectando directamente la geometría del cono de controles con las condiciones de segundo orden (Arutyunov et al., 2022b; Karamzin, 2023).

En ambos ejemplos, la verificación explícita de las propiedades clave (falla de (A), validez de (B) y condición de Legendre–Clebsch) sigue la misma pauta. Primero, se calculan los gradientes de las restricciones activas (terminales, mixtas y de control) y se organizan en las matrices relevantes (por ejemplo, matrices tipo G_{mix} o submatrices de D), identificando así el rango de la matriz de gradientes de restricciones activas y constatando que es menor que el número de restricciones activas, lo que muestra el fallo de (A), en paralelo con los ejemplos de programación no lineal donde LICQ no se cumple pero se mantienen condiciones de segundo orden mediante calificaciones más débiles (Andreani, Gómez, et al., 2022; Giorgi, 2019; Haeser & Ramos, 2020). Segundo, se construye el operador lineal global $DG(x^*, u^*)$ asociado a las restricciones y se define el cono de multiplicadores admisibles $K(x^*, u^*)$; se comprueba que la única solución de

$$DG(x^*, u^*)^\top(\lambda_0, p, \alpha, \beta) = 0, (\lambda_0, p, \alpha, \beta) \in K(x^*, u^*)$$

es $(\lambda_0, p, \alpha, \beta) = (0,0,0,0)$, confirmando la hipótesis (B) y la normalidad relativa del extremal, en concordancia con las calificaciones de restricción débiles con propiedades de segundo orden (Haeser & Ramos, 2020, 2021; Ma et al., 2023). Finalmente, se calcula $H_{uu}(t)$, se describe el conjunto de direcciones críticas del control $\Gamma_\lambda(t)$ y se verifica que

$$\langle H_{uu}(t)\, w(t), w(t)\rangle \leq 0 \forall\, w(t) \in \Gamma_\lambda(t), \text{ p.c.t. } t \in [t_0, t_1]$$

conectando explícitamente la estructura del problema con la conclusión del Teorema 2.1 y proporcionando una validación constructiva de la condición de Legendre–Clebsch bajo hipótesis de rango débil. En conjunto, estos ejemplos permiten comprobar, paso a paso, cada uno de los elementos teóricos de la metodología —hipótesis de rango, normalidad relativa, cono de direcciones críticas y semidefinición de H_{uu}— de forma coherente con las recomendaciones actuales en programación no lineal y control óptimo.

Reproducibilidad y posibles extensiones

Con el fin de facilitar la replicación de las pruebas y la adaptación de la metodología a variantes del problema, se fijan explícitamente el intervalo temporal $T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, el espacio de trayectorias de estado $\mathcal{X} = W^{1,\infty}(T; \mathbb{R}^n)$ y el espacio de controles $\mathcal{U} = L^\infty(T; \mathbb{R}^m)$, o bien el subconjunto de funciones esencialmente acotadas con valores en un conjunto compacto y convexo $U \subset \mathbb{R}^m$. Estas elecciones son coherentes con el problema de Bolza (21)–(24) y la dinámica (22), y, bajo hipótesis estándar de Lipschitz sobre f, garantizan existencia y unicidad de soluciones en $\mathcal{X}$. Las funciones de datos f, L, h, g se suponen medibles en t y de clase C^1(o C^2) en (x, u), con derivadas continuas y localmente acotadas en subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$; ello permite formular rigurosamente las ecuaciones adjuntas (26), la condición de máximo (27), las condiciones de complementariedad (29) y la segunda variación (42) a lo largo del extremal (x^*, u^*), en línea con trabajos recientes en control óptimo con restricciones mixtas y de estado (Andreani, Gómez, et al., 2022; Bourdin & Ferreira, 2021; Haeser & Ramos, 2020; Karamzin, 2023).

Las restricciones en los extremos se codifican mediante el conjunto cerrado $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ que aparece en (23), mientras que las restricciones mixtas tiempo–estado–control se describen por $h(t, x, u) = 0$, $g(t, x, u) \leq 0$ como en (24), lo que induce, para cada $t \in T$, el conjunto admisible

$$M(t) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : h(t, x, u) = 0, g(t, x, u) \leq 0\}$$

con sus conos tangente y normal $T_{M(t)}$ y $N_{M(t)}$, introducidos en la Sección 2.4. Los conjuntos de índices de desigualdades activas en los extremos y a lo largo de la trayectoria se denotan por $A_{\text{ext}}(x^*)$ y $A_{\text{mix}}(t)$, respectivamente, en coherencia con la Sección 2.5. Los multiplicadores $(\lambda_0, p, \alpha, \beta)$ satisfacen las condiciones de Pontryagin (26)–(29) y las reglas de signo para las desigualdades, a saber, $\beta(t) \geq 0$, $g(t, x^*(t), u^*(t)) \leq 0$ y $\beta(t)^\top g(t, x^*(t), u^*(t)) = 0$, como en (29). Esta convención permite definir el cono de multiplicadores admisibles $K(x^*, u^*)$ en (31) y formular la hipótesis de rango débil (B) en (32) de manera compacta, en consonancia con las calificaciones de restricción débiles con propiedades de segundo orden (Andreani, Haeser, et al., 2022; Haeser & Ramos, 2020).

Desde el punto de vista geométrico, en los extremos se emplean el cono tangente $T_C(x^*(t_0), x^*(t_1))$ y el cono normal asociado $N_C(x^*(t_0), x^*(t_1))$, introducidos en la condición de transversalidad (28). A lo largo de la trayectoria, los conos $T_{M(t)}(x^*(t), u^*(t))$ y $N_{M(t)}(x^*(t), u^*(t))$ recogen la información local de las restricciones mixtas (Sección 2.4). A partir de la linealización de la dinámica y de las restricciones (33)–(36), se construyen las direcciones tangenciales del control $\Gamma(t)$ y el conjunto global Γ en (37)–(38); imponiendo la anulación de la primera variación se obtiene el conjunto de direcciones críticas primarias Γ_0 en (39), y, fijado un cuádruple de multiplicadores, el conjunto de direcciones críticas relativas Γ_λ en (40), sobre el cual se formula la condición de Legendre–Clebsch generalizada (45).

La arquitectura teórica se apoya en un núcleo reducido de expresiones, cuya numeración se mantiene estable en toda la sección: el problema de Bolza y sus restricciones (21)–(24), el Hamiltoniano extendido (25), las condiciones de primer orden (26)–(29), las hipótesis de rango estándar y débil (30)–(32), la dinámica y restricciones linealizadas (33)–(36), la definición de direcciones críticas y la segunda variación (37)–(43), la condición de Legendre–Clebsch bajo (B) (45) y los ejemplos lineal–cuadrático y con cono de controles (47)–(51). Las referencias cruzadas a estos números de ecuación aseguran que la reconstrucción de las demostraciones y la comparación con trabajos recientes (Bourdin & Ferreira, 2021; Hager, 2025; Ndaïrou & Torres, 2023) puedan hacerse sin ambigüedades ni cambios de notación. En conjunto, la fijación de dominios, espacios funcionales, notación y referencias cruzadas proporciona un entorno reproducible en el que cada paso de la derivación puede verificarse localmente y contrastarse con modelos de la literatura contemporánea en programación no lineal y control óptimo.

La metodología desarrollada en las Secciones 2.1–2.7 es deliberadamente modular: separa el paso variacional–discreto, el retorno al problema de Bolza, la formulación de las hipótesis de rango (A) y (B) y la obtención de la condición de Legendre–Clebsch sobre direcciones críticas. Esta estructura facilita extensiones en varias direcciones. En problemas no suaves, donde el funcional o las restricciones incluyen términos no diferenciables (normas ℓ_1, funciones max–min, penalizaciones tipo "hinge", etc.), la derivada de Fréchet empleada en (32) debe reemplazarse por subderivadas generalizadas; la hipótesis (B) se reformula exigiendo que la única combinación de subgradientes de las restricciones con multiplicadores en $K(x^*, u^*)$ que produzca el vector nulo sea la trivial, y la segunda variación (42)–(45) se interpreta en términos de formas cuadráticas generalizadas, siguiendo la filosofía de la optimización no suave de segundo orden (Andreani, Gómez, et al., 2022; Haeser & Ramos, 2020).

Cuando las restricciones dominantes afectan solo al estado, del tipo $x(t) \in S \subset \mathbb{R}^n$, $t \in T$, el conjunto $M(t)$ se reduce a un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y el cono de direcciones críticas combina la dinámica linealizada

$$\delta\dot{x}(t) = f_x(t, x^*, u^*)\,\delta x(t) + f_u(t, x^*, u^*)\,\delta u(t)$$

con la geometría local de la frontera de S en los puntos visitados por x^*. En este contexto, las hipótesis (A) y (B) se formulan sobre los gradientes de las funciones que describen S y la estructura de $N_S(x^*(t))$, de acuerdo con resultados recientes para problemas con restricciones de estado (Karamzin, 2023). Si en lugar de (22) se consideran dinámicas fraccionarias (por ejemplo, con derivadas de Caputo de orden $\alpha \in (0,1)$ u operadores de orden distribuido), el esquema de la Sección 2 se mantiene siempre que exista una fórmula de integración por partes adaptada al operador fraccionario y se reformulen las ecuaciones adjuntas y las condiciones de contorno asociadas (análogas a (26) y (28)). El Hamiltoniano extendido conserva la forma (25) y la condición de Legendre–Clebsch generalizada mantiene la estructura de (45), pero las direcciones críticas deben respetar la dinámica fraccionaria linealizada, como se ilustra en problemas de Bolza fraccionarios (Bergounioux & Bourdin, 2020; Bourdin & Ferreira, 2021; Ndaïrou & Torres, 2023). En marcos estocásticos (ecuaciones diferenciales estocásticas, ruidos multiplicativos, costos en esperanza), el análisis puede adaptarse trabajando con procesos (X, U) definidos en un espacio de probabilidad, ecuaciones adjuntas estocásticas y una segunda variación expresada en términos de esperanzas condicionales. La condición de Legendre–Clebsch se reformula entonces como

$$\mathbb{E}[\langle H_{uu}(t,\omega)w(t,\omega), w(t,\omega)\rangle] \leq 0$$

para direcciones críticas aleatorias $w(\cdot,\omega)$, y las hipótesis de rango (30)–(32) se verifican, casi seguramente, en analogía con las extensiones estocásticas de la programación matemática de segundo orden. De forma análoga, la misma estructura puede servir de base para problemas multiobjetivo, en los que (21) se reemplaza por un vector de objetivos y las direcciones críticas se definen en términos de eficiencia de Pareto, así como para problemas bilevel o jerárquicos, donde parte de las restricciones de $G(x,u)$ codifican condiciones de optimalidad de un problema de nivel inferior: en ambos casos, el núcleo consiste en identificar un conjunto adecuado de direcciones críticas (análogo a Γ_λ) y un conjunto de multiplicadores con normalidad relativa (análogo a $K(x^*, u^*)$, Ma et al., 2023).

El enfoque presenta, no obstante, varias limitaciones. La derivación de la segunda variación (42) y de la condición de Legendre–Clebsch (45) descansa en la existencia de derivadas de segundo orden de f, L, h, g respecto de (x, u); en aplicaciones donde los datos son solo Lipschitz o presentan discontinuidades, este requisito puede ser demasiado restrictivo y obliga a recurrir a análisis no suave, modificando sustancialmente (42)–(45). Además, la teoría se ha desarrollado en dimensión finita, con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}^m$; la extensión a dinámicas gobernadas por EDP o ecuaciones integrales en espacios de Hilbert requiere herramientas adicionales de análisis funcional y una reformulación de $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ y de la segunda variación (42) en un entorno infinitodimensional. La verificación explícita de la hipótesis de rango débil (B) en (32) también puede ser costosa en alta dimensión: establecer que la única solución de

$$DG(x^*, u^*)^\top(\lambda_0, p, \alpha, \beta) = 0, (\lambda_0, p, \alpha, \beta) \in K(x^*, u^*)$$

es la trivial requiere analizar en detalle la estructura de los gradientes de las restricciones y del cono $K(x^*, u^*)$; los ejemplos de la Sección 2.7 muestran casos manejables, pero no agotan las situaciones realistas.

Por otra parte, la condición de Legendre–Clebsch generalizada (45) sigue siendo esencialmente necesaria: afina la condición clásica al restringirse a direcciones realmente críticas, pero no proporciona por sí sola condición suficiente de segundo orden para mínimos fuertes o globales; para ello se requieren hipótesis adicionales de convexidad, coercividad o estructura especial, como discuten, por ejemplo, Byrd et al. (2019) y Hager (2024). La filosofía de la hipótesis (B) se apoya, además, en la posibilidad de reemplazar el conjunto completo de restricciones activas por un subconjunto modificado que preserve el cono crítico relevante para la segunda variación; en la práctica, la identificación de dicho subconjunto no es única y diferentes elecciones pueden inducir condiciones de segundo orden con distinto grado de precisión o conservadurismo, lo que convierte en problema abierto el diseño de criterios sistemáticos para seleccionar restricciones modificadas en control óptimo (Andreani, Gómez, et al., 2022; Andreani, Haeser, et al., 2022; Haeser & Ramos, 2020). Finalmente, la metodología se centra en el análisis teórico de segundo orden y en la estructura geométrica de las hipótesis de rango, sin entrar en el diseño detallado de algoritmos numéricos que exploten directamente la condición de Legendre–Clebsch generalizada (45); aunque cabe esperar que estos resultados informen métodos tipo SQP, de disparo u homotopía para problemas de control óptimo con restricciones mixtas, el desarrollo de esquemas concretos se deja para trabajos futuros.

En síntesis, el enfoque ofrece una generalización robusta de la condición de Legendre–Clebsch basada en hipótesis de rango débiles y en el análisis de direcciones críticas, pero su aplicación actual se restringe a problemas suaves, de dimensión finita y formulados en el marco de Bolza; su extensión a contextos no suaves, infinitodimensionales o estocásticos y su integración en algoritmos numéricos específicos constituyen líneas naturales de investigación futura.

Resultados y discusión

Resultados teóricos principales

Sea (x_0, u_0) un par admisible que satisface las condiciones de primer orden de la Metodología. Para estudiar su optimalidad local basta analizar el desarrollo de segundo orden del funcional reducido en direcciones que respetan las restricciones linealizadas (direcciones críticas). Si (h, v) es una variación admisible del estado y del control (por ejemplo, $h \in W^{1,2}$, $v \in L^2$, con las condiciones de frontera linealizadas incorporadas), la expansión de Taylor de I alrededor de (x_0, u_0) es

$$I(x_0 + \varepsilon h, u_0 + \varepsilon v) = I(x_0, u_0) + \varepsilon I'(x_0, u_0)[h, v] + \frac{\varepsilon^2}{2} Q(h, v) + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0 \tag{52}$$

donde $Q(\cdot,\cdot)$ es la forma cuadrática de segundo orden asociada a (x_0, u_0), obtenida en la Metodología en términos de las derivadas segundas del Hamiltoniano (o de la Lagrangiana), de las funciones de restricción y de los multiplicadores. Recordamos únicamente que: Q es simétrica y continua en el espacio de direcciones admisibles; la parte puramente en v contiene H_{uu} (término ligado a la condición de Legendre–Clebsch); y los términos restantes agrupan derivadas mixtas y de estado, así como segundas derivadas de las restricciones activas. El efecto de las restricciones de segundo orden se concentra en el cono crítico de direcciones, definido como

$$K := \{(h, v) : (h, v) \text{ satisface las restricciones linealizadas y } I'(x_0, u_0)[h, v] = 0\} \tag{53}$$

de modo que K coincide con el conjunto de direcciones críticas en el sentido de la programación no lineal. Sobre este cono, las condiciones de optimalidad de segundo orden se expresan de forma natural mediante el signo de Q: una condición necesaria para un mínimo local débil normal es

$$Q(h, v) \geq 0 \ \forall \ (h, v) \in K$$

mientras que, bajo las hipótesis de rango de la Metodología y una condición de Legendre–Clebsch (clásica o generalizada) sobre H_{uu} en las direcciones críticas, una condición suficiente fuerte viene dada por

$$Q(h, v) \geq \alpha \|(h, v)\|^2 \quad \forall \ (h, v) \in K_{\mathrm{rad}}$$

donde $K_{\mathrm{rad}} \subset K$ es un cono crítico "radial" adecuado y $\alpha > 0$. Esta coercividad de Q en K_{rad} implica crecimiento cuadrático del funcional y, por consiguiente, optimalidad local estricta de (x_0, u_0). Este enfoque es coherente con formulaciones modernas de condiciones de segundo orden en control óptimo y programación infinidimensional, donde se estudia la no negatividad (o positividad estricta) de una forma cuadrática sobre el cono crítico de direcciones factibles; véanse, por ejemplo, resultados recientes en problemas gobernados por ecuaciones de Fokker–Planck, restricciones mixtas y restricciones de estado (Soledad Aronna & Tröltzsch, 2021). En síntesis, el objeto central del análisis es la forma cuadrática Q y su comportamiento sobre K; en lo que sigue se descompone Q en sus componentes “mixtas” y “puras en el control” y se muestra cómo las hipótesis de rango permiten controlar su signo, incluso cuando la condición de rango estándar falla. Para el resultado principal, sea ahora (x_0, u_0) un mínimo local débil normal de (P) y $K_{\mathrm{rad}}(x_0, u_0)$ el cono crítico radial definido en la Sección 2. Para cada dirección crítica $(h, v) \in K_{\mathrm{rad}}(x_0, u_0)$, la forma cuadrática puede escribirse como

$$Q(h, v) = Q_{\mathrm{mix}}\,(h, v) + \int_T \langle H_{uu}(t)v(t), v(t)\rangle dt \tag{54}$$

donde $H_{uu}(t)$ es la derivada segunda del Hamiltoniano respecto del control, evaluada a lo largo del extremal (x_0, u_0, p_0), y $Q_{\mathrm{mix}}(h, v)$ agrupa los términos que involucran al estado y los términos mixtos estado–control. Para casi todo $t \in T$ definimos el subespacio de direcciones críticas de control como

$$\Gamma(\mathrm{t}) = \{\mathrm{v}(\mathrm{t}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}: \exists\ \mathrm{h} \mid (\mathrm{h}, \mathrm{v}) \in \mathrm{K\_rad}(\mathrm{x}_0, \mathrm{u}_0)\} \tag{55}$$

de manera que $\Gamma(t)$ recoge exactamente las variaciones de control compatibles con las restricciones linealizadas (dinámica, extremos y restricciones mixtas) en el sentido del cono crítico radial.

Teorema 3.1 (Condición de Legendre–Clebsch bajo rango débil).

Supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:

- (x_0, u_0) es un mínimo local débil normal del problema (P);
- la hipótesis de rango débil (B) se cumple a lo largo de la trayectoria (x_0, u_0);
- La forma cuadrática Q asociada a la segunda variación del funcional de coste y de las restricciones es no negativa sobre el cono crítico radial, es decir,

$$Q(h, v) \geq 0\ \forall\ (h, v) \in K_{\mathrm{rad}}\,(x_0, u_0) \tag{56}$$

Entonces existe un conjunto $N \subset T$ de medida nula tal que, para todo $t \in T \setminus N$ y toda dirección crítica $w \in \Gamma(t)$ asociada a alguna dirección crítica $(h, v) \in K_{\mathrm{rad}}(x_0, u_0)$, se verifica la desigualdad de Legendre–Clebsch generalizada

$$\langle H_{uu}(t)w, w\rangle \geq 0 \tag{57}$$

En particular, la hessiana del hamiltoniano respecto del control es positiva semidefinida sobre las direcciones críticas del control a lo largo de la trayectoria óptima.

Además, si Q es coerciva en $K_{\mathrm{rad}}(x_0, u_0)$, es decir, si existe $\alpha > 0$ tal que

Pol. Con. (Edición núm. 113) Vol. 10, No 12, Diciembre 2025, pp. 274-317, ISSN: 2550 - 682X

$$Q(h, v) \geq \alpha \|(h, v)\|^2 \ \forall \ (h, v) \in K_{\text{rad}}(x_0, u_0) \tag{58}$$

entonces existe $\beta > 0$ para la cual se cumple la versión reforzada de la condición de Legendre–Clebsch

$$\langle H_{uu}(t)w, w\rangle \geq \beta \|w\|^2 \text{ p.c.t. } t \in T, \forall w \in \Gamma(t) \tag{59}$$

Este resultado se inscribe en la tradición clásica que relaciona la no negatividad (o la coercividad) de la segunda variación con condiciones de tipo Legendre–Clebsch para extremales singulares, tal como se establece en los trabajos pioneros de Kelley (1964), Goh (1966), Robbins (1967), Jacobson (1970) y Molinari (1975). En desarrollos más recientes, la misma filosofía se ha formulado de manera sistemática mediante formas cuadráticas definidas sobre conos críticos en problemas de control óptimo y programación no lineal (Andreani et al., 2010, 2017; M. Aronna et al., 2012; M. S. Aronna et al., 2013; Bonnans et al., 2014; Osmolovskii, 2012; Osmolovskii & Maurer, 2012; Šimon Hilscher & Zeidan, 2018). Bajo la hipótesis de rango débil (B), el Teorema 3.1 extiende este esquema al cono crítico radial $K_{\text{rad}}(x_0, u_0)$, mostrando que la no negatividad de la segunda variación implica la condición de Legendre–Clebsch generalizada en las direcciones críticas del control, mientras que la coercividad de Qrefuerza dicha condición hasta obtener una desigualdad estricta en norma sobre $\Gamma(t)$.

Marco de programación no lineal

Los resultados de la Sección 3.1 se interpretan en el marco de la programación no lineal (PNL) viendo el problema de control (P) como un problema de optimización con restricciones en dimensión infinita, cuya estructura local alrededor de (x_0, u_0) está codificada por la forma cuadrática $Q(h, v)$ y el cono crítico radial $K_{\text{rad}}(x_0, u_0)$. Mediante una proyección adecuada de las variaciones (h, v) que satisfacen las ecuaciones linealizadas y las restricciones de extremo, se construye un vector reducido y que parametriza las direcciones "radiales" de estado y control, y sobre él un problema de PNL finito-dimensional con función objetivo reducida $\varphi(y)$, restricciones de igualdad $c(y) = 0$ y restricciones de desigualdad activas $g(y) \leq 0$. El cono crítico del problema reducido se define como

$$C_{\text{red}}(y_0) = \left\{d \mid \nabla c(y_0)d = 0, \nabla g_j(y_0)d \leq 0 \ \forall \ j \in \mathcal{A}(y_0), \langle\nabla\varphi(y_0), d\rangle = 0\right\} \tag{60}$$

donde $A(y_0)$ es el conjunto de restricciones activas en y_0. La forma cuadrática de segundo orden asociada al lagrangiano reducido

$$q(d) = \langle\nabla^2_{yy} L(y_0, \lambda_0, \mu_0)d, d\rangle \tag{61}$$

es, por construcción, el análogo finito–dimensional de $Q(h, v)$ cuando las variaciones (h, v) se proyectan sobre el espacio de parámetros y. La hipótesis de rango débil (B) garantiza que esta proyección respeta la estructura linealizada del problema de control: toda dirección crítica radial $(h, v) \in K_{\text{rad}}(x_0, u_0)$ genera una dirección crítica reducida $d \in C_{\text{red}}(y_0)$ y, recíprocamente, las direcciones de $C_{\text{red}}(y_0)$ se levantan a trayectorias (h, v) en el cono crítico radial. En consecuencia, la desigualdad de segundo orden

$$Q(h, v) \geq 0 \forall\ (h, v) \in K_{\text{rad}}(x_0, u_0) \qquad (62)$$

es equivalente, en el problema reducido, a la no negatividad de $q(d)$ sobre $C_{\text{red}}(y_0)$; de modo análogo, la coercividad de Q en $K_{\text{rad}}(x_0, u_0)$ se traduce en crecimiento cuadrático de $q(d)$ en $C_{\text{red}}(y_0)$. Esta reformulación permite leer el Teorema 2.1 como un resultado de segundo orden para un problema de PNL con un cono crítico "no estándar", inducido por la dinámica y por la hipótesis de rango débil (B). En este marco, la condición de Legendre–Clebsch generalizada sobre el subespacio $\Gamma(t)$ aparece como la versión puntual, en la variable de control, del hecho de que $q(d)$ es no negativa (o coerciva) en el cono crítico reducido.

La literatura reciente de PNL ha destacado el papel de las calificaciones de restricciones de segundo orden para obtener condiciones necesarias y suficientes robustas incluso en problemas degenerados. En particular, Haeser y Ramos (2020) proponen calificaciones que combinan información de primer y segundo orden, basadas en apareamiento polar y en la geometría de los conos críticos, mientras que Fukuda, Haeser y Mito (2023) estudian condiciones de segundo orden débiles para problemas cónicos no lineales (por ejemplo, programación semidefinida o de cono de segundo orden) apoyándose en versiones de rango constante débil menos exigentes que la no degeneración clásica. Nuestro enfoque se sitúa en la misma línea conceptual, pero adaptado al control óptimo: la hipótesis de rango débil (B) cumple un papel análogo a esas calificaciones de segundo orden, sin exigir independencia lineal completa de los gradientes activos, pero garantizando suficiente regularidad para definir un cono crítico reducido $C_{\text{red}}(y_0)$ estable y trasladar la información de $Q(h, v)$ a una condición casi puntual sobre $H_{uu}(t)$ en $\Gamma(t)$. Desde el punto de vista de la PNL, la formulación en términos de $C_{\text{red}}(y_0)$ aproxima este trabajo a propuestas que exploran la interacción entre geometría de conos críticos y calificaciones de segundo orden; por ejemplo, Giorgi (2019) analiza variantes de la calificación de Abadie formuladas directamente en términos del cono crítico para obtener condiciones necesarias más fuertes con demostraciones simplificadas. Aquí, el uso del cono crítico radial y de su imagen reducida puede verse como una versión adaptada a problemas con dinámica continua y restricciones de trayectoria. En última instancia, aunque la formulación se inspira en estos desarrollos finito–dimensionales, el resultado de la Sección 3.1 trasciende ese marco al estar diseñado para problemas de control con dinámica continua y, eventualmente, restricciones no suaves en el tiempo, manteniendo la compatibilidad entre la lectura de PNL y la interpretación en términos de trayectorias.

Resultados para el problema de control óptimo

Desde el punto de vista del problema de control óptimo original, los resultados de segundo orden se organizan en torno a los multiplicadores adjuntos (λ_0, p, μ) y al cono crítico de trayectorias. En la Metodología se mostró que, para el extremal (x_0, u_0), existen multiplicadores no triviales que satisfacen ecuaciones adjuntas, complementariedad y maximalidad del hamiltoniano, codificando así toda la información de primer orden en el sentido del principio del máximo. El cono crítico $K(x_0, u_0)$ se definió como el conjunto de variaciones (h, v) que satisfacen el sistema linealizado de las ecuaciones de estado, las restricciones de extremo y las posibles restricciones mixtas en estado y control; el cono crítico radial $K_{\text{rad}}(x_0, u_0)$ se obtiene imponiendo adicionalmente una condición de "radialidad" compatible con la estructura de la forma cuadrática $Q(h, v)$. En este contexto, la desigualdad

$$Q(h, v) \geq 0 \forall\ (h, v) \in K_{\text{rad}}(x_0, u_0) \tag{63}$$

representa la versión infinitesimal del requisito de mínimo local débil en torno a (x_0, u_0). La hipótesis de rango débil (B) describe cómo se acoplan $K_{\text{rad}}(x_0, u_0)$ y los multiplicadores adjuntos: las direcciones críticas "no visibles" a primer orden, producidas por la degeneración de las restricciones, quedan controladas mediante una descomposición adecuada del espacio de variaciones que permite identificar el subespacio $\Gamma(t)$ de direcciones críticas de control relevantes en cada instante y proyectar coherentemente $K_{\text{rad}}(x_0, u_0)$ sobre el cono crítico reducido de la PNL asociada, como en la Sección 3.2. De este modo, la información de segundo orden que en programación no lineal se expresa como una forma cuadrática sobre un cono crítico reducido tiene una traducción directa en términos de trayectorias, controles y multiplicadores, lo que justifica que la condición de Legendre–Clebsch reforzada (Teorema 2.1) pueda leerse enteramente en el espacio de controles. Reuniendo estos elementos, el Teorema 2.1 se interpreta, en el lenguaje del control óptimo, como una versión reforzada de la condición de Legendre–Clebsch bajo rango débil: si

Pol. Con. (Edición núm. 113) Vol. 10, No 12, Diciembre 2025, pp. 274-317, ISSN: 2550 - 682X

(x_0, u_0) es un mínimo local débil normal, (B) se cumple a lo largo de la trayectoria extremal y $Q(h, v)$ es no negativa en $K_{\text{rad}}(x_0, u_0)$, entonces la hessiana del hamiltoniano respecto al control satisface

$$\langle H_{uu}(t)w, w\rangle \geq 0 \text{ p.c.t. } t \in T, \qquad \forall w \in \Gamma(t) \tag{64}$$

es decir, $H_{uu}(t)$ es semidefinida positiva sobre el subespacio de direcciones críticas de control $\Gamma(t)$ para casi todo tiempo; en el caso coercivo se obtiene la cota más fuerte

$$\langle H_{uu}(t)w, w\rangle \geq \beta \parallel w \parallel^2 \text{ p.c.t. } t \in T, \qquad \forall w \in \Gamma(t) \tag{65}$$

para cierta constante $\beta > 0$, que proporciona un crecimiento cuadrático estricto en las direcciones críticas relevantes. Frente a la condición clásica —que exige semidefinitud positiva de $H_{uu}(t)$ en todo $\mathbb{R}^m$—, el resultado es más fino: se formula sólo sobre $\Gamma(t)$, que refleja las restricciones efectivas impuestas por la dinámica y las restricciones mixtas, y se apoya en la hipótesis de rango débil (B) en lugar de una calificación de rango fuerte, ampliando así la clase de problemas en los que se dispone de un criterio de segundo orden útil. Este esquema es consistente con desarrollos recientes en control óptimo y optimización con restricciones, donde se han propuesto condiciones de segundo orden adaptadas a restricciones de estado o estructuras degeneradas: en control de sistemas parabólicos con restricciones de estado, por ejemplo, Casas, Mateos y Rösch (2024) formulan condiciones suficientes en términos de un cono crítico que incorpora la activación temporal de las restricciones; en problemas set-constrained más generales, Deng y Zhang (2020) proponen condiciones direccionales basadas en conos tangentes y conjuntos tangentes de segundo orden para capturar mejor la geometría local del conjunto factible. La contribución específica aquí es integrar la estructura dinámica del problema en la definición del cono crítico radial y del subespacio $\Gamma(t)$, lo que produce una condición de Legendre–Clebsch suficientemente general para abarcar problemas degenerados y, al mismo tiempo, suficientemente concreta para verificarse directamente sobre $H_{uu}(t)$. Ello sugiere extensiones naturales hacia problemas con restricciones de estado, sistemas gobernados por ecuaciones en derivadas parciales o estructuras cónicas en el espacio de controles, donde las ideas de programación no lineal de segundo orden y de control óptimo deben combinarse de forma cuidadosa.

Ejemplo ilustrativo

Consideremos un ejemplo sencillo en el que la hipótesis de rango estándar (A) falla, mientras que la hipótesis de rango débil (B) y la condición de Legendre–Clebsch se verifican sobre las

Pol. Con. (Edición núm. 113) Vol. 10, No 12, Diciembre 2025, pp. 274-317, ISSN: 2550 - 682X

direcciones críticas. El estado es $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ y el control $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathbb{R}^2$, con dinámica integradora

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t), \qquad \dot{x}_2(t) = u_2(t), \qquad t \in [0,1] \tag{66}$$

y condición inicial $x(0) = (0,0)$. El funcional de costo está dado por

$$I(x,u) = \int_0^1 (u_2(t)^2 - u_1(t)^2)dt \tag{67}$$

de modo que el uso de u_2 se penaliza cuadráticamente, mientras que el de $u_1$se "premia" a través del término $-u_1^2$. Para evitar que el problema sea mal planteado, se introducen restricciones sobre el control:

$$\varphi_1(u) := u_1 - u_2 \leq 0, \qquad \varphi_2(u) := -u_1 - u_2 \leq 0, \qquad \varphi_3(u) := -u_2 \leq 0 \tag{68}$$

Estas desigualdades imponen $u_2 \geq 0$ y $-u_2 \leq u_1 \leq u_2$; en particular,

$$U := \{u \in \mathbb{R}^2 : u_2 \geq 0, -u_2 \leq u_1 \leq u_2\} = \{u \in \mathbb{R}^2 : u_2 \geq |u_1|\} \tag{69}$$

un cono poliédrico con vértice en el origen. Para $u \in U$ se tiene $u_2 \geq |u_1|$, luego

$$u_2^2 - u_1^2 = (u_2 - |u_1|)(u_2 + |u_1|) \geq 0 \tag{70}$$

por lo que el integrando de I es no negativo. El control nulo $u_0(t) \equiv (0,0)$ es admisible y genera la trayectoria $x_0(t) \equiv (0,0)$, con

$$I(x_0, u_0) = \int_0^1 0dt = 0 \tag{71}$$

En consecuencia, para cualquier control admisible u se cumple $I(x,u) \geq 0$, y el par (x_0, u_0) es un mínimo global (y, en particular, local) del problema.

El Hamiltoniano extendido, para $\lambda_0 \geq 0$ y multiplicadores $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ con $\mu_\alpha \geq 0$, viene dado por

$$\begin{aligned} &H(t, x, u, p, \mu, \lambda_0) \\ &\qquad = \langle p, u \rangle - \lambda_0(u_2^2 - u_1^2) - \mu_1(u_1 - u_2) - \mu_2(-u_1 - u_2) \\ &\qquad - \mu_3(-u_2) \end{aligned} \tag{72}$$

Como ni el integrando ni las restricciones dependen de x, se obtiene $\dot{p}(t) = -H_x = 0$, de modo que $p(t)$ es constante. El estado final es libre y no hay término terminal, por lo que la condición de transversalidad impone $p(1) = 0$ y, por tanto, $p(t) \equiv 0$. En el caso normal $\lambda_0 = 1$, las condiciones de primer orden respecto del control, en los intervalos donde u_0 es continuo, exigen

$$H_u(t, u_0(t), \mu(t), 1) = 0 \tag{73}$$

Las derivadas parciales son

Pol. Con. (Edición núm. 113) Vol. 10, No 12, Diciembre 2025, pp. 274-317, ISSN: 2550 - 682X

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 2u_1 - \mu_1 + \mu_2, \qquad \frac{\partial H}{\partial u_2} = -2u_2 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \tag{74}$$

y, al evaluar en $u_0(t) = (0,0)$, se obtiene el sistema

$$-\mu_1(t) + \mu_2(t) = 0, \qquad \mu_1(t) + \mu_2(t) + \mu_3(t) = 0 \tag{75}$$

con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y condiciones de complementariedad $\mu_\alpha(t)\, \varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$. Dado que $\varphi_\alpha(u_0) = 0$ para $\alpha = 1,2,3$, todas las restricciones están activas en el vértice del cono, pero el sistema (75) sólo admite la solución

$$\mu_1(t) = \mu_2(t) = \mu_3(t) = 0 \tag{76}$$

Así, (x_0, u_0) es un extremal normal con todos los multiplicadores asociados a restricciones activas iguales a cero, configuración típica en la que la hipótesis de rango estándar (A) puede fallar.

En efecto, los gradientes de las restricciones respecto al control son

$$\nabla_u \varphi_1(u) = (1, -1), \qquad \nabla_u \varphi_2(u) = (-1, -1), \qquad \nabla_u \varphi_3(u) = (0, -1) \tag{77}$$

y en $u_0 = (0,0)$ las tres desigualdades son activas. La matriz formada por estos gradientes es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{78}$$

cuyo rango es $\operatorname{rang}(M) = 2$, mientras que el número de restricciones activas es $p = 3$ y la dimensión del control es $m = 2$, con $2 < m < p$. La condición de rango estándar (A), basada en la independencia lineal de todos los gradientes activos, no se verifica.

Para la hipótesis de rango débil (B), se requiere que el único vector $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ con $\nu_\alpha \geq 0$ que satisface

$$\nu_1 \nabla \varphi_1(u_0) + \nu_2 \nabla \varphi_2(u_0) + \nu_3 \nabla \varphi_3(u_0) = 0 \tag{79}$$

sea el vector nulo. Esto equivale al sistema

$$\nu_1 - \nu_2 = 0, \qquad -\nu_1 - \nu_2 - \nu_3 = 0, \qquad \nu_1, \nu_2, \nu_3 \geq 0 \tag{80}$$

De la primera ecuación se deduce $\nu_2 = \nu_1$; sustituyendo en la segunda,

$$-2\nu_1 - \nu_3 = 0 \Longrightarrow \nu_3 = -2\nu_1 \tag{81}$$

La restricción $\nu_3 \geq 0$ implica $\nu_1 \leq 0$, y junto con $\nu_1 \geq 0$ conduce a

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0 \tag{82}$$

Por tanto, (B) se cumple: no existe combinación no trivial con coeficientes no negativos de los gradientes activos que se anule, a pesar de la dependencia lineal en $\mathbb{R}^2$.

Pol. Con. (Edición núm. 113) Vol. 10, No 12, Diciembre 2025, pp. 274-317, ISSN: 2550 - 682X

Para analizar la condición de Legendre–Clebsch en las direcciones críticas, las variaciones de control $h = (h_1, h_2)$ deben satisfacer las restricciones linealizadas

$$\nabla\varphi_i(u_0) \cdot h \leq 0, \qquad i = 1,2,3, \tag{83}$$

es decir,

$$h_1 - h_2 \leq 0, \qquad -h_1 - h_2 \leq 0, \qquad -h_2 \leq 0 \tag{84}$$

que equivalen a

$$h_1 \leq h_2, \qquad h_1 + h_2 \geq 0, \qquad h_2 \geq 0 \tag{85}$$

Así, el conjunto de direcciones críticas es el cono

$$\tau_1 = \{h \in \mathbb{R}^2 : h_2 \geq 0, -h_2 \leq h_1 \leq h_2\} = \{h \in \mathbb{R}^2 : h_2 \geq |h_1|\} \tag{86}$$

que es la versión “en el espacio de direcciones” del mismo cono U de controles.

La única contribución de segundo orden del costo al Hamiltoniano proviene del término cuadrático en u. Como

$$L(u) = u_2^2 - u_1^2, \qquad L_{uu}(u) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{87}$$

la hessiana del Hamiltoniano respecto al control en el extremal es

$$H_{uu}(u_0) = -\lambda_0 L_{uu}(u_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{88}$$

Para cualquier dirección crítica $h \in \tau_1$, se cumple

$$\langle h, H_{uu} h \rangle = (h_1 \quad h_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2(h_1^2 - h_2^2) \tag{89}$$

Dado que $h_2 \geq |h_1|$, se tiene $h_2^2 \geq h_1^2$ y, por tanto,

$$h_1^2 - h_2^2 \leq 0 \Longrightarrow \langle h, H_{uu} h \rangle \leq 0 \ \forall \ h \in \tau_1 \tag{90}$$

Aunque H_{uu} es indefinida en todo $\mathbb{R}^2$, su restricción al subespacio de direcciones críticas $\Gamma(t) = \tau_1$ tiene el signo adecuado en el sentido de Legendre–Clebsch: la curvatura del Hamiltoniano es “correcta” precisamente en las direcciones relevantes impuestas por las restricciones. Este ejemplo muestra explícitamente que la hipótesis de rango débil (B) basta para garantizar una condición de Legendre–Clebsch formulada sobre $\Gamma(t)$, incluso cuando falla la calificación de rango estándar (A), y confirma el marco teórico desarrollado en la Sección 3 en un problema de control óptimo simple con cono de controles degenerado.

Pol. Con. (Edición núm. 113) Vol. 10, No 12, Diciembre 2025, pp. 274-317, ISSN: 2550 - 682X

Conclusiones

Síntesis de los aportes teóricos

Se ha desarrollado una formulación de segundo orden para problemas de control óptimo de tipo Bolza con restricciones de igualdad y desigualdad, basada en una hipótesis de rango débil (B) que reemplaza a la calificación estándar (A). A partir de la segunda variación del funcional y de las restricciones se introducen el cono crítico radial $K_{\mathrm{rad}}(x_0, u_0)$ y el subespacio de direcciones críticas del control $\Gamma(t)$, que concentran la información linealizada relevante. En este marco, el resultado principal establece una condición de Legendre–Clebsch formulada únicamente sobre $w \in \Gamma(t)$: la hessiana del hamiltoniano respecto del control $H_{uu}(t)$ es semidefinida positiva en $\Gamma(t)$ para casi todo t, y, cuando la forma cuadrática $Q(h, v)$ es coerciva en $K_{\mathrm{rad}}(x_0, u_0)$, se obtiene además una cota estricta que proporciona una versión reforzada de la condición de Legendre–Clebsch para problemas con rango degenerado.

Vinculación con la programación no lineal y la literatura reciente

La proyección de $K_{\mathrm{rad}}(x_0, u_0)$ sobre un cono crítico reducido y la descomposición de $Q(h, v)$ en parte mixta y parte puramente en el control conectan explícitamente el análisis de segundo orden en control óptimo con las calificaciones de restricciones de segundo orden de la programación no lineal reciente. En particular, la hipótesis (B) puede interpretarse como una calificación de segundo orden que, sin exigir independencia lineal completa de los gradientes activos, garantiza un cono crítico reducido estable y permite traducir la información de $Q(h, v)$ a una condición casi puntual sobre $H_{uu}(t)$ en $\Gamma(t)$. Así, el trabajo aproxima el lenguaje de la programación matemática de segundo orden al de la teoría del máximo de Pontryagin.

Alcance práctico y líneas futuras

El ejemplo lineal–cuadrático con controles en un cono poliédrico muestra que la hipótesis estándar (A) puede fallar mientras que la hipótesis de rango débil (B) se verifica y preserva una condición de Legendre–Clebsch significativa sobre $\Gamma(t)$. En este caso, los multiplicadores, el cono crítico y las direcciones de control críticas se describen de forma explícita, lo que ilustra que el enfoque es aplicable a problemas concretos de control con restricciones degeneradas. No obstante, el marco propuesto descansa en cierta suavidad de los datos, se ha planteado esencialmente en un contexto finito-dimensional y proporciona principalmente condiciones necesarias. Futuras extensiones naturales incluyen el tratamiento sistemático de datos no suaves, la adaptación a problemas

Pol. Con. (Edición núm. 113) Vol. 10, No 12, Diciembre 2025, pp. 274-317, ISSN: 2550 - 682X

gobernados por ecuaciones en derivadas parciales o en espacios de Hilbert y el estudio de variantes estocásticas o jerárquicas, donde los conjuntos de multiplicadores y los conos críticos presenten estructuras más complejas. En conjunto, los resultados ofrecen una base para seguir integrando técnicas de segundo orden de la programación no lineal en el análisis de problemas avanzados de control óptimo.

Referencias

1. Andreani, R., Behling, R., Haeser, G., & Silva, P. J. S. (2017). On second-order optimality conditions in nonlinear optimization. Optimization Methods and Software, 32(1), 22–38. https://doi.org/10.1080/10556788.2016.1188926
2. Andreani, R., Fukuda, E. H., Haeser, G., Santos, D. O., & Secchin, L. D. (2024). Optimality Conditions for Nonlinear Second-Order Cone Programming and Symmetric Cone Programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 200(1), 1–33. https://doi.org/10.1007/s10957-023-02338-6
3. Andreani, R., Gómez, W., Haeser, G., Mito, L. M., & Ramos, A. (2022). On Optimality Conditions for Nonlinear Conic Programming. Mathematics of Operations Research, 47(3), 2160–2185. https://doi.org/10.1287/moor.2021.1203
4. Andreani, R., Haeser, G., Mito, L. M., Ramírez, C. H., & Silveira, T. P. (2022). Global Convergence of Algorithms Under Constant Rank Conditions for Nonlinear Second-Order Cone Programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 195(1), 42–78. https://doi.org/10.1007/s10957-022-02056-5
5. Andreani, R., Martínez, J. M., & Schuverdt, M. L. (2010). Constant-rank condition and second-order constraint qualification in nonlinear programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 2, 255–275. https://doi.org/10.1007/s10957-010-9671-8
6. Aronna, M., Bonnans, J., Dmitruk, A., & Lotito, P. (2012). Quadratic order conditions for bang-singular extremals. Numerical Algebra, Control and Optimization, 2(3), 511–546. https://doi.org/10.3934/naco.2012.2.511
7. Aronna, M. S., Bonnans, J. F., Dmitruk, A. V., & Lotito, P. (2013). Quadratic order conditions for bang-singular extremals. https://doi.org/10.3934/naco.2012.2.511

8. Arutyunov, A., Karamzin, D., & Pereira, F. (2022a). Maximum Principle and Second-Order Optimality Conditions in Control Problems with Mixed Constraints. Axioms, 11(2), 40. https://doi.org/10.3390/axioms11020040
9. Arutyunov, A. V., Karamzin, D. Y., & Pereira, F. L. (2022b). Some Remarks on the Issue of Second-order Optimality Conditions in Control Problems with Mixed Constraints. IFAC-PapersOnLine, 55(16), 231–235. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.09.029
10. Arutyunov, A. V., & Zhukovskiy, S. E. (2020). Necessary Optimality Conditions for Optimal Control Problems in the Presence of Degeneration. Differential Equations, 56(2), 238–250. https://doi.org/10.1134/S0012266120020093
11. Ayala, V., Jouan, P., Torreblanca, M. L., & Zsigmond, G. (2021). Time optimal control for linear systems on Lie groups. Systems & Control Letters, 153, 104956. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2021.104956
12. Bergounioux, M., & Bourdin, L. (2020). Pontryagin maximum principle for general Caputo fractional optimal control problems with Bolza cost and terminal constraints. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 26, 35. https://doi.org/10.1051/cocv/2019021
13. Bhat, H. A., Iqbal, A., & Aftab, M. (2024a). First and second order necessary optimality conditions for multiobjective programming with interval-valued objective functions on Riemannian manifolds. RAIRO - Operations Research, 58(5), 4259–4276. https://doi.org/10.1051/ro/2024157
14. Bhat, H. A., Iqbal, A., & Aftab, M. (2024b). First and second order necessary optimality conditions for multiobjective programming with interval-valued objective functions on Riemannian manifolds. RAIRO - Operations Research, 58(5), 4259–4276. https://doi.org/10.1051/ro/2024157
15. Bonnans, J. F., Dupuis, X., & Pfeiffer, L. (2014). Second-Order Necessary Conditions in Pontryagin Form for Optimal Control Problems. SIAM Journal on Control and Optimization, 52(6), 3887–3916. https://doi.org/10.1137/130923452
16. Bourdin, L., & Ferreira, R. A. C. (2021). Legendre’s Necessary Condition for Fractional Bolza Functionals with Mixed Initial/Final Constraints. Journal of Optimization Theory and Applications, 190(2), 672–708. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01908-w

17. Byrd, R. H., Cocola, J., & Tapia, R. A. (2019). Extending the Pennisi--McCormick Second-Order Sufficiency Theory for Nonlinear Programming to Infinite Dimensions. SIAM Journal on Optimization, 29(3), 1870–1878. https://doi.org/10.1137/19M1239337
18. Cabré, X., Erneta, I. U., & Felipe-Navarro, J.-C. (2024). A Weierstrass extremal field theory for the fractional Laplacian. Advances in Calculus of Variations, 17(4), 1067–1093. https://doi.org/10.1515/acv-2022-0099
19. Casas, E., Mateos, M., & Rösch, A. (2024). New second order sufficient optimality conditions for state constrained parabolic control problems. https://doi.org/10.1080/02331934.2024.2314242
20. Cruz, F., Almeida, R., & Martins, N. (2021). Optimality conditions for variational problems involving distributed-order fractional derivatives with arbitrary kernels. AIMS Mathematics, 6(5), 5351–5369. https://doi.org/10.3934/math.2021315
21. Deng, L., & Zhang, X. (2020). Second Order Necessary Conditions for Endpoints-Constrained Optimal Control Problems on Riemannian manifolds. http://arxiv.org/abs/2007.05178
22. Fukuda, E. H., Haeser, G., & Mito, L. M. (2023). On the Weak Second-order Optimality Condition for Nonlinear Semidefinite and Second-order Cone Programming. Set-Valued and Variational Analysis, 31(2), 15. https://doi.org/10.1007/s11228-023-00676-1
23. Giorgi, G. (2019). Notes on Constraint Qualifications for Second-Order Optimality Conditions. Journal of Mathematics Research, 11(5), 16. https://doi.org/10.5539/jmr.v11n5p16
24. Goh, B. S. (1966). Necessary conditions for singular extremals involving multiple control variables. SIAM Journal on Control, 4(4), 716–731. https://doi.org/10.1137/0304052
25. Haeser, G., & Ramos, A. (2020). New Constraint Qualifications with Second-Order Properties in Nonlinear Optimization. Journal of Optimization Theory and Applications, 184(2), 494–506. https://doi.org/10.1007/s10957-019-01603-x
26. Haeser, G., & Ramos, A. (2021). On constraint qualifications for second-order optimality conditions depending on a single Lagrange multiplier. Operations Research Letters, 49(6), 883–889. https://doi.org/10.1016/j.orl.2021.09.008

27. Hager, W. W. (2025). Second-Order Sufficient Optimality Conditions in the Calculus of Variations. Journal of Optimization Theory and Applications, 205(1), 17. https://doi.org/10.1007/s10957-025-02639-y

28. Hehl, A., & Neitzel, I. (2023). Second-order optimality conditions for an optimal control problem governed by a regularized phase-field fracture propagation model. Optimization, 72(6), 1665–1689. https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2034814

29. Jacobson, D. H. (1970). Sufficient Conditions for Nonnegativity of the Second Variation in Singular and Nonsingular Control Problems. SIAM Journal on Control, 8(3), 403–423. https://doi.org/10.1137/0308029

30. Karamzin, D. Y. (2023). Normality and second-order optimality conditions in state-constrained optimal control problems with bounded minimizers. Journal of Differential Equations, 366, 378–407. https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.04.011

31. Kelley, H. J. (1964). A Second Variation Test for Singular Extremals. 2(8), 1380–1382. https://doi.org/10.2514/3.2562

32. Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2021). Linear and Nonlinear Programming (Vol. 228). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85450-8

33. Ma, X., Yao, W., Ye, J. J., & Zhang, J. (2023). Combined approach with second-order optimality conditions for bilevel programming problems. http://arxiv.org/abs/2108.00179

34. Malmir, I. (2024). New pure multi-order fractional optimal control problems with constraints: QP and LP methods. ISA Transactions, 153, 155–190. https://doi.org/10.1016/j.isatra.2024.08.003

35. Molinari, B. F. (1975). Nonnegativity of a Quadratic Functional. SIAM Journal on Control, 13(4), 792–806. https://doi.org/10.1137/0313046

36. Ndaïrou, F., & Torres, D. F. M. (2023). Pontryagin Maximum Principle for Incommensurate Fractional-Orders Optimal Control Problems. Mathematics, 11(19), 4218. https://doi.org/10.3390/math11194218

37. Osmolovskii, N. P. (2012). Second-order sufficient optimality conditions for control problems with linearly independent gradients of control constraints. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 18(2), 452–482. https://doi.org/10.1051/cocv/2011101

38. Osmolovskii, N. P., & Maurer, H. (2012). Applications to Regular and Bang-Bang Control. Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9781611972368
39. Robbins, H. M. (1967). A generalized Legendre–Clebsch condition for the singular case of optimal control. IBM Journal of Research and Development, 11(4), 361–372. https://doi.org/10.1147/rd.114.0361
40. Šimon Hilscher, R., & Zeidan, V. (2018). Sufficiency and sensitivity for nonlinear optimal control problems on time scales via coercivity. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 24(4), 1705–1734. https://doi.org/10.1051/cocv/2017070
41. Soledad Aronna, M., & Tröltzsch, F. (2021). First and second order optimality conditions for the control of Fokker-Planck equations. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 27, 15. https://doi.org/10.1051/cocv/2021014