



Exploración de funciones trigonométricas mediante aplicaciones móviles con realidad aumentada en estudiantes de Básica Superior y Bachillerato en entornos físicos reales

Exploring trigonometric functions using mobile applications with augmented reality in upper elementary and high school students in real physical environments

Explorando funções trigonométricas usando aplicações móveis com realidade aumentada em alunos do ensino básico II e secundário em ambientes físicos reais

Orgel Hernán Acaro Calva ^I
orgel.acaro@educacion.gob.ec
<https://orcid.org/0009-0006-7848-5388>

Silvana Elizabeth Montero Molina ^{II}
silvanamonteromolina@hotmail.com
<https://orcid.org/0009-0007-9702-5747>

Cristian Danilo Cañar Erazo ^{III}
cristian.canar@educacion.gob.ec
<https://orcid.org/0009-0007-3406-831X>

Francisco Miguel Cazorla Bastidas ^{IV}
francisco.cazorla@educacion.gob.ec
<https://orcid.org/0009-0006-7181-8047>

Correspondencia: orgel.acaro@educacion.gob.ec

Ciencias de la Educación
Artículo de Investigación

*** Recibido:** 26 de julio de 2025 ***Aceptado:** 24 de agosto de 2025 *** Publicado:** 06 de septiembre de 2025

- I. Unidad Educativa María Angélica Idrobo, Quito-Ecuador.
- II. Unidad Educativa Cazadores de los Ríos, Cuenca-Ecuador.
- III. Unidad Educativa María Angélica Idrobo, Quito-Ecuador.
- IV. Unidad Educativa Gonzol, Chunchi-Ecuador.

Resumen

Este estudio tiene como objetivo verificar el uso de aplicaciones móviles con realidad mejorada, especialmente Geogebra 3D, para enseñar funciones trigonométricas en los estudiantes de educación superior básica y bachillerato. Gracias al método cualitativo, de descripción y directorio, se han analizado ejemplos interactivos, como la animación de la nave y la montaña, modelando las funciones de seno, coseno y tangente en el contexto. Estos recursos permiten flexibilidad e intuitivo para mostrar conceptos matemáticos, facilitando la comprensión de los fenómenos periódicos y las relaciones trigonométricas. Análisis basado en el modelo teórico de MTSK, enfatizando las paletas KOT y KMT, que muestra el potencial de estas herramientas para mejorar el conocimiento de la enseñanza y las matemáticas de los maestros. Los resultados muestran que la realidad de la mejora puede contribuir significativamente al contexto, la capacitación más interesante y de la construcción, contribuyendo a los beneficios activos de capacitación y matemáticas.

Palabras Clave: trigonometría; realidad aumentada; GeoGebra; TIC; MTSK.

Abstract

This study aims to verify the use of mobile applications with enhanced reality, specifically Geogebra 3D, to teach trigonometric functions to students in basic and high school higher education. Using a qualitative, descriptive, and directory approach, interactive examples were analyzed, such as the animation of the ship and the mountain, modeling the sine, cosine, and tangent functions in context. These resources allow for flexibility and intuitiveness in displaying mathematical concepts, facilitating the understanding of periodic phenomena and trigonometric relationships. The analysis is based on the theoretical model of MTSK, emphasizing the KOT and KMT palettes, demonstrating the potential of these tools to improve teachers' teaching and mathematical knowledge. The results show that augmented reality can significantly contribute to the context, making training more interesting and constructive, contributing to the active benefits of teaching and mathematics.

Keywords: trigonometry; augmented reality; GeoGebra; ICT; MTSK.

Resumo

Este estudo tem como objetivo verificar a utilização de aplicações móveis com realidade aumentada, especificamente o Geogebra 3D, para o ensino de funções trigonométricas a alunos do

ensino básico e secundário. Utilizando uma abordagem qualitativa, descritiva e de diretório, foram analisados exemplos interativos, como a animação do navio e da montanha, modelando as funções seno, cosseno e tangente em contexto. Estes recursos permitem flexibilidade e intuitividade na exibição de conceitos matemáticos, facilitando a compreensão de fenômenos periódicos e relações trigonométricas. A análise baseia-se no modelo teórico do MTSK, com ênfase nas paletas KOT e KMT, demonstrando o potencial destas ferramentas para melhorar o ensino e o conhecimento matemático dos professores. Os resultados mostram que a realidade aumentada pode contribuir significativamente para o contexto, tornando a formação mais interessante e construtiva, contribuindo para os benefícios ativos do ensino e da matemática.

Palavras-chave: trigonometria; realidade aumentada; GeoGebra; TIC; MTSK.

Introducción

La trigonometría continúa siendo, hasta el presente, una de las asignaturas que más dificultades presenta a los estudiantes de educación superior básica y bachillerato. Y no se debe tanto a las matemáticas, que se dominan con ejercicio, sino a que sus conceptos son muy teóricos y es difícil entender su utilidad en la vida cotidiana. Por esa razón, es necesario encontrar otras maneras de enseñarla, más relacionadas con la vida del estudiante.

En este sentido, la realidad aumentada parece ser muy alentadora. Incluso más si se utiliza con el teléfono móvil, puesto que es un objeto que todos tienen en la mano. Un caso es GeoGebra 3D, que al combinarse con RA facilita ver y relacionarse con las gráficas trigonométricas en tiempo real, como si fueran reales en el aula o en la casa del niño. De este modo, elementos que parecen complejos, como la periodicidad del seno y del coseno, así como la relación con el círculo unitario, se vuelven más simples de comprender. Y lo maravilloso es que el alumno ya no se queda quieto mirando, sino que se involucra activamente en la plataforma para aprender más.

Autores como Caro y Córdoba, (2020) o Farfán (2022) dicen que la RA tiene un gran potencial para mejorar la enseñanza porque ayuda a entender cosas abstractas. Aunque también aclaran que no basta con tener la app sino también se necesita que el docente cambie cómo enseña, que se prepare bien y que haya un seguimiento.

Si vemos evaluaciones como PISA (Olaya, 2023), es evidente que numerosos países de América Latina tienen un bajo rendimiento en matemáticas. Esto hace necesario considerar nuevas estrategias. En cambio, Corea del Sur, por ejemplo, ha invertido completamente en tecnología

educativa y los resultados son evidentes. Estos ejemplos pueden funcionar como referencia para explorar otras alternativas que entusiasmen a los alumnos y, a la vez, optimicen su aprendizaje.

Con lo mencionado, este estudio sugiere examinar la utilización de apps móviles con realidad aumentada para enseñar funciones trigonométricas en la preparatoria. La intención es vincularlas a situaciones más auténticas, que resulten prácticas. Se piensa que con esta estrategia se pueden abandonar los métodos tradicionales, monótonos y memorísticos, optando por un aprendizaje más visual, práctico y relacionado con la solución de problemas reales. La idea de trabajar con una propuesta tecnológica basada en realidad aumentada (RA) no se queda solo en que los alumnos entiendan mejor las funciones trigonométricas. También busca que se sientan más motivados, que usen su creatividad y que aprendan a pensar de manera crítica. Lo interesante es que al usar la RA, las matemáticas ya no se ven como algo lejano, sino que se pueden relacionar directamente con lo que viven en su día a día. En el fondo, lo que se pretende es una educación más dinámica, más conectada con la realidad y con lo que pide el siglo XXI (López, 2022).

Cuando se habla de incluir tecnologías nuevas en matemáticas, como la RA en el celular, estamos frente a un cambio fuerte. Los estudiantes no solo consumen contenidos, también los manipulan e interactúan con ellos (Guamushing, 2024). Y, claro, el papel del profesor cambia bastante. Para que esta incorporación sea útil de verdad, los docentes necesitan dominar tanto el contenido matemático como el uso de estas herramientas y, además, conocer bien cómo aprenden sus alumnos.

Aquí es donde entra el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge), que da un marco teórico para entender qué tipo de conocimiento requiere un profesor de matemáticas al trabajar con tecnología como GeoGebra en RA. Según Carrillo y colegas (2018), este modelo divide el conocimiento en dos partes: el matemático (MK) y el didáctico-pedagógico (PCK).

El MK incluye los saberes propios de la disciplina, y se divide en tres subdominios: KoT (conocimiento de los temas), KSM (conocimiento de las estructuras matemáticas) y KPM (conocimiento de las prácticas matemáticas). Por ejemplo, con el KoT se espera que el profesor domine las definiciones y propiedades de las funciones trigonométricas, y que pueda explicarlas más allá de “solo resolver ejercicios” (García y Camacho, 2024).

El KSM se enfoca en la habilidad de conectar distintos conceptos, ya sea dentro de la trigonometría o con otras áreas como geometría analítica o cálculo. Aquí la RA resulta muy útil porque esas conexiones se pueden mostrar de manera visual y dinámica. El KPM, por último, se refiere a cómo

se construye el conocimiento matemático: modelar, comprobar, usar notación y demostrar. En este punto, GeoGebra con RA permite al estudiante experimentar, mover gráficas y comprobar resultados por sí mismo, lo que vuelve su aprendizaje más activo y cercano.

Para el segundo dominio, el conocimiento educativo pedagógico sobre el contenido (PCK), centrándose en cómo los maestros convierten el conocimiento matemático en tácticas de aprendizaje efectivas. Se divide en KFML (conocimiento de las características del aprendizaje matemático), KMT (conocimiento del aprendizaje matemático) y KML (conocimiento de los estándares educativos). KFML requiere que los maestros establezcan dificultades comunes que los estudiantes encuentren mientras estudian funciones trigonométricas, como la falta de visual o desconectados de la realidad. Cuando se usan, estas limitaciones se pueden superar a través de actuaciones interactivas y experimentadas (Martíez, 2024).

KMT está relacionado con la selección de estrategias, tareas y recursos apropiados para la capacitación. En este contexto, la selección de geogebra de fuera como un recurso pedagógico brinda a los maestros la oportunidad de crear actividades interactivas y colocar más para alentar la participación activa de los estudiantes en su educación.

Finalmente, el KMLS se relaciona con el entendimiento del docente acerca del nivel de desarrollo cognitivo que se anticipa para sus alumnos, junto con la conexión de sus métodos con los estándares de evaluación tanto nacionales como internacionales, como las evaluaciones PISA o SABER (Díaz, 2022).

Como indica Prieto (2020), el uso de herramientas como GeoGebra 3D con realidad aumentada en la enseñanza de las funciones trigonométricas debe considerarse no solo como una novedad tecnológica, sino como una intervención educativa compleja que demanda un conocimiento profundo del docente. El modelo MTSK facilita la identificación y el fortalecimiento de las competencias necesarias, asegurando que la tecnología se utilice de manera efectiva para enriquecer el aprendizaje y no solo como un recurso adicional

Metodología

Este trabajo se desarrolla con un enfoque cualitativo, de carácter descriptivo, bajo la modalidad de estudio de caso instrumental (Stake, 2005), complementado con una revisión bibliográfica. No busca intervenir de manera directa con estudiantes o profesores, sino revisar y analizar ejemplos didácticos donde se modelan funciones trigonométricas usando realidad aumentada en aplicaciones

móviles, sobre todo con GeoGebra 3D, además de apoyarse en literatura sobre didáctica de las matemáticas, TIC y modelación.

Un estudio descriptivo porque la intención es mostrar el valor educativo de experiencias interactivas que representan funciones trigonométricas en escenarios que imitan lo real. También es un caso instrumental, ya que, a partir de ejemplos concretos creados en GeoGebra como la animación de un barco o una montaña se busca obtener aprendizajes generales sobre el papel de la RA en la enseñanza de matemáticas en bachillerato.

Al mismo tiempo, se trata de una investigación bibliográfica, pues incluye la consulta de artículos, informes, libros y recursos digitales. Estas fuentes sirven de apoyo para relacionar las experiencias prácticas con marcos teóricos como el modelo MTSK.

El análisis se centra en modelos interactivos elaborados con GeoGebra y disponibles en repositorios educativos. Estos permiten trabajar con funciones seno, coseno y tangente en situaciones concretas, por ejemplo, el movimiento de un barco en el mar o la pendiente de una montaña.

Algunos ejemplos son:

- La animación del barco
- El modelo de la montaña, que facilita analizar inclinación, altura y distancia usando funciones trigonométricas en un entorno gráfico. Este tipo de recurso ayuda a conectar las funciones con contextos cercanos a la vida diaria.

El análisis de estos casos se llevó a cabo mediante revisión documental y análisis de contenido. Se buscó identificar los elementos matemáticos implicados (funciones, ángulos y relaciones trigonométricas) y valorar su potencial pedagógico para fomentar un aprendizaje más activo, visual y contextualizado.

Para orientar la investigación se retomaron aspectos del modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge), especialmente los subdominios KoT (conocimiento de los temas) y KMT (conocimiento de la enseñanza). Aunque no se trabaja con un profesor en específico, este marco sirve de guía para pensar cómo un docente podría aprovechar los modelos digitales en su práctica.

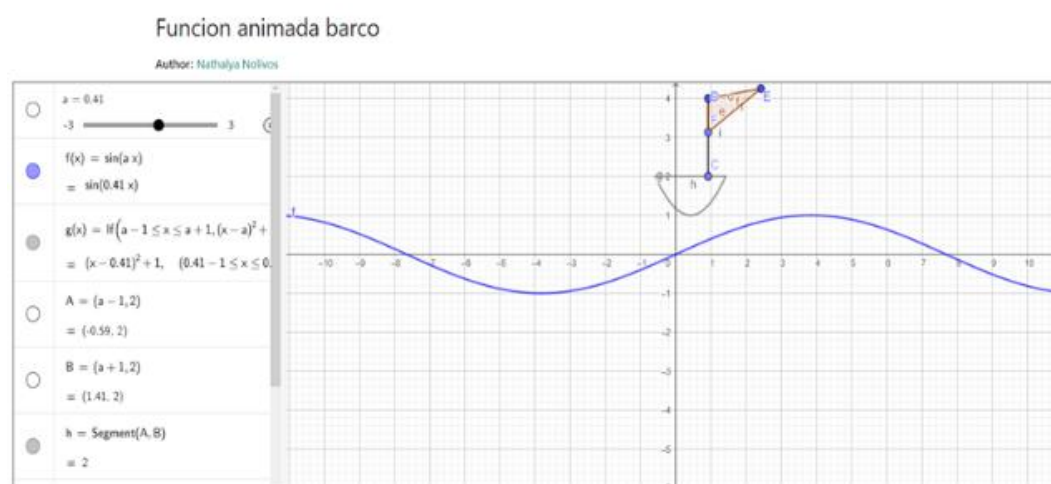
Resultados

Ejemplo 1: Función animada del barco

Este modelo simula el movimiento de un barco sobre una onda senoidal, utilizando funciones trigonométricas para representar el vaivén del barco en el eje vertical como se observa en la siguiente figura.

Figura1.

Barco animado en GeoGebra



Fuente: (Nolivos y Moreira, 2023)

Elementos trigonométricos identificados:

- Funciones seno y coseno como representación de fenómenos periódicos.
- Ángulos formados con el eje horizontal.
- Longitudes determinadas por razones trigonométricas.

Potencial pedagógico:

- Visualización dinámica de cómo una función trigonométrica modela un fenómeno físico.
- Exploración de conceptos de amplitud, periodo y desplazamiento.
- Contextualización que facilita el aprendizaje significativo.

Desde el modelo MTSK, este ejemplo puede relacionarse con:

- **KoT:** Por el conocimiento de definiciones, propiedades y representaciones de funciones trigonométricas.
- **KMT:** Por la identificación de una estrategia didáctica que permite representar matemáticamente una situación real mediante herramientas tecnológicas.

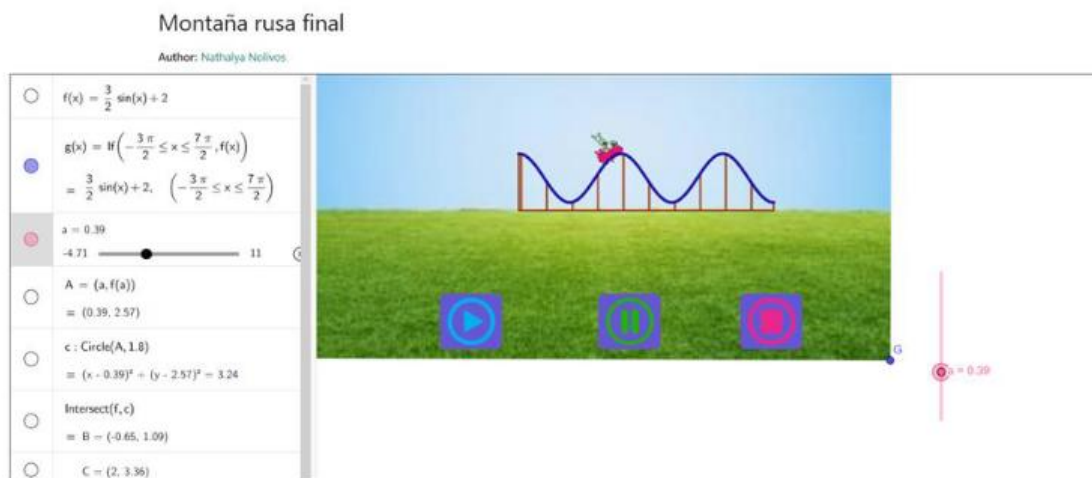
Ejemplo 2: Modelo de montaña animada

Este recurso simula una montaña cuya pendiente puede ser analizada mediante funciones trigonométricas. Se permite modificar ángulos, alturas y distancias, promoviendo la comprensión de:

- La relación entre la altura de la montaña, su inclinación y la distancia horizontal.
- El uso de tangente para calcular pendientes.
- La visualización de triángulos en el espacio y su descomposición.

Figura 2.

Montaña Rusa



Fuente: (Nolivos y Moreira, 2023)

Elementos trigonométricos identificados:

- Ángulos de inclinación como entrada para el cálculo trigonométrico.
- Aplicación de tangente, seno y coseno en contextos de altura y distancia.
- Triángulos rectángulos aplicados a contextos reales.

Potencial pedagógico:

- Exploración libre y manipulativa de conceptos abstractos.
- Interpretación visual inmediata de resultados numéricos.
- Aumento del interés y motivación del estudiante al conectar matemáticas con situaciones del mundo real.

Desde el modelo MTSK, este ejemplo refleja:

- **KoT:** Comprensión profunda de procedimientos y representaciones.
- **KMT:** Uso de recursos virtuales con potencial para guiar la enseñanza de conceptos geométricos y trigonométricos.

Síntesis de los hallazgos

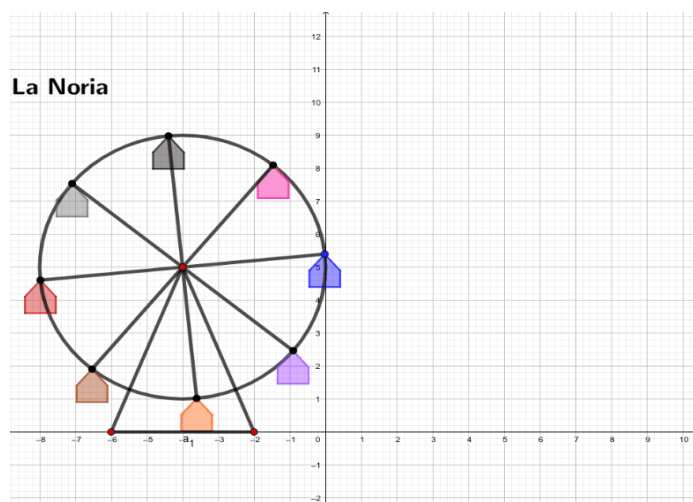
Ambos modelos comparten un enfoque basado en la representación gráfica y contextualizada de funciones trigonométricas, lo que favorece una enseñanza más significativa y visual. Además, permiten al docente incorporar recursos interactivos que promueven el aprendizaje activo.

El análisis desde el modelo MTSK sugiere que estos recursos pueden potenciar el conocimiento del profesor en los siguientes aspectos:

- **KoT:** Amplían la forma en que se representan y enseñan las funciones seno, coseno y tangente.
- **KMT:** Ofrecen estrategias didácticas efectivas para integrar las TIC y la realidad aumentada en el aula.

Estos resultados permiten inferir que la incorporación de aplicaciones móviles con realidad aumentada como GeoGebra 3D, tiene un alto potencial para transformar la enseñanza tradicional de la trigonometría en la educación media.

Ejemplo3: Rueda La Noria



Fuente: (Prieto, 2020)

Elementos trigonométricos identificados:

- Movimiento circular uniforme representado como función periódica (altura en función del tiempo).

- Aplicación del seno y coseno para modelar la altura de un punto en una circunferencia giratoria.
- Uso de ángulos en radianes o grados para representar posiciones angulares en la rueda.
- Asociación entre posición angular, tiempo y altura sobre el suelo.
- Modelación matemática de un fenómeno cíclico usando funciones trigonométricas.

Potencial pedagógico:

- Visualización clara y concreta del comportamiento de funciones periódicas como el seno y el coseno.
- Fomenta la relación entre geometría y trigonometría en un contexto cotidiano y accesible.
- Posibilita una exploración manipulativa mediante herramientas como compás y papel milimetrado.
- Favorece la formulación y validación de hipótesis sobre el comportamiento del movimiento circular.
- Permite trabajar conceptos de periodicidad, fase, amplitud y desfase de forma natural.

Desde el modelo MTSK, este ejemplo refleja:

• **KoT (Conocimiento del contenido matemático):**

- Comprensión del vínculo entre funciones trigonométricas y fenómenos cíclicos reales.
- Capacidad para representar la altura como una función seno o coseno del tiempo, con parámetros ajustados a las condiciones iniciales del problema (amplitud, periodo, fase).
- Identificación y uso de la periodicidad para predecir posiciones futuras.

• **KMT (Conocimiento matemático para la enseñanza):**

- Diseño de una actividad contextualizada que facilita la comprensión de conceptos abstractos.
- Integración de herramientas didácticas (compás, papel milimetrado, simulaciones) para promover la visualización.
- Fomento del pensamiento algebraico y geométrico a través del análisis de gráficas y funciones.
- Posibilidad de comparar y analizar dos gráficas con diferente fase (Clara vs. Rodrigo), promoviendo discusión matemática significativa

Resumen de resultados

- En este trabajo se buscó llevar la trigonometría a un escenario más real y entendible. Para ello se tomaron los movimientos de Clary y Rodrigo, lo que permitió mostrar con claridad conceptos como amplitud, tiempo, frecuencia y fase. Presentarlos de este modo ayudó a que los estudiantes encontraran una explicación más cercana y menos abstracta.
- Con base en el modelo MTSK, los hallazgos se pueden resumir en dos aspectos:
- CAT: se vio fortalecido al usar las funciones seno y coseno para describir la altura en el círculo, lo que facilitó explicar cada parámetro sin caer en tecnicismos complicados.
- KMT: se destacó la utilidad de relacionar la trigonometría con ejemplos de la vida cotidiana y apoyarse en gráficos o materiales manipulables. Esto generó una enseñanza más clara y adaptada a los estudiantes.
- Lo interesante de este tipo de actividades es que cambian la forma tradicional de enseñar la trigonometría. En lugar de limitarse a fórmulas, se convierten en experiencias más significativas. Además, coinciden con los enfoques actuales que impulsan el uso de recursos dinámicos, como GeoGebra, que no solo facilitan la comprensión, sino que también hacen más atractivo el aprendizaje.

Conclusión

Durante la investigación pude darme cuenta de que las herramientas con realidad aumentada, como GeoGebra 3D, pueden hacer mucho más accesible la enseñanza de las funciones trigonométricas en el bachillerato. Al trabajar con ejemplos interactivos como la animación de un barco o el modelo de una montaña resultó evidente que estos materiales ayudan a que los estudiantes entiendan mejor ideas que normalmente se sienten abstractas y difíciles.

Cuando las funciones seno, coseno y tangente se presentan en contextos cotidianos, el aprendizaje se vuelve más activo y significativo. Para los docentes también representa una oportunidad de enriquecer su práctica. Desde la perspectiva del modelo MTSK, noté que estos recursos no solo refuerzan el conocimiento del contenido (CAT), sino que además ofrecen herramientas para diseñar estrategias más efectivas (KMT), integrando las TIC de forma práctica y coherente.

Al ser un estudio descriptivo y bibliográfico, no fue necesario trabajar directamente en el aula. Aun así, la revisión de experiencias y recursos digitales disponibles permitió reflexionar y llegar a conclusiones útiles. Lo que conlleva una incorporación de tecnologías móviles e interactivas con

el fin de cambiar la manera en que se enseña la trigonometría y abre la posibilidad de un aprendizaje más visual, dinámico y cercano a lo que buscan los estudiantes hoy en día.

Referencias

- Caro, N., & Córdoba, W. (2020). Realidad aumentada como estrategia tecno-pedagógica para el fortalecimiento del aprendizaje del pensamiento geométrico – métrico en los estudiantes de grado décimo. Obtenido de Repositorio de la Universidad de Santander Udes: <https://repositorio.udes.edu.co/server/api/core/bitstreams/e80efd55-a2f0-4b22-bb20-ab6e158385f8/content>
- Díaz, F. (2022). Interpretación conceptual de las funciones trigonométricas a través del uso del software GeoGebra. Obtenido de IESE - Instituto de Estudios en Educación: <https://manglar.uninorte.edu.co/handle/10584/11643#page=1>
- Díaz, F. (2025). Implementación de una propuesta didáctica de trigonometría diseñada en GeoGebra. doi: <https://doi.org/10.61820/puaq.v7i15.1444>
- Farfán, K. (2022). Aplicación móvil de realidad aumentada para mejorar el aprendizaje de geometría del espacio en el curso de matemáticas de los alumnos de segundo grado de secundaria del colegio nuestra señora de las Mercedes, 2019. Obtenido de Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac: https://repositorio.unamba.edu.pe/bitstream/handle/UNAMBA/1103/T_732.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- García, A., & Camacho, V. (2024). Uso de GeoGebra para facilitar la comprensión de las definiciones de amplitud, período y diagrama de fase de las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno. Obtenido de Revista Dialnet: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=10085334>
- Guamushing, N. (2024). Diseño de una guía metodológica basada en gamificación para la enseñanza de las funciones trigonométricas mediante geogebra para el bgu. obtenido de Pontificia Universidad Católica del Ecuador: <https://repositorio.puce.edu.ec/server/api/core/bitstreams/8cbd4954-fb7a-4c48-a4dd-519df65871b8/content>
- López, J. (2022). Aplicación de la realidad Aumentada y aprendizaje de la geometría en el espacio para tercero de bachillerato de la Unidad Educativa “El Empalme”. Periodo 2021-2022. Obtenido de Escuela Superior Politécnica de Chimborazo: <https://core.ac.uk/download/pdf/541756804.pdf>

- Martínez, E. (2024). Propuesta metodológica para la construcción y análisis de gráficas de funciones trigonométricas en estudiantes de décimo grado mediante el uso de GeoGebra. Obtenido de Repositorio Digital UFPS : <https://repositorio.ufps.edu.co/handle/ufps/9476>
- Nolivos, N., & Moreira, J. (2023). Geogebra como herramienta didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas. doi:<https://doi.org/10.55813/gaea/ccri/v4/nE1/88>
- Olaya, J. (2023). Potenciando el aprendizaje de las funciones trigonométricas mediante GeoGebra en contextos reales para estudiantes de 10° de la I.E.D Castillo de la Alboraya. Obtenido de Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD: <https://repository.unad.edu.co/bitstream/handle/10596/58778/jpolayaf.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Prieto, I. (2020). La rueda de la fortuna de Paris. Obtenido de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/HCafAVv8#material/e2yj8v9c>